

Centre d'Etudes de Saclay
Direction des Réacteurs Nucléaires
Département de Mécanique et de Technologie
Service d'Etudes des Réacteurs et de Mathématiques Appliquées

"TIBERE"
UNE METHODE DE CALCUL
DE L'EFFET DE L'HETEROGENEITE D'UN RESEAU
SUR LES FUITES DE NEUTRONS

par

Pierre BENOIST, Ivan PETROVIC

NOTE CEA-N-2707 - Pierre BENOIST, Ivan PETROVIC

"TIBERE - UNE METHODE DE CALCUL DE L'EFFET DE L'HETEROGENEITE D'UN RESEAU SUR LES FUITES DE NEUTRONS"

Sommaire - Dans les logiciels APOLLO et APOLLO-2 le calcul du flux dans un assemblage hétérogène est effectué par la méthode des probabilités de collision. Le calcul des fuites de neutrons au contraire, est effectué sur un assemblage préalablement homogénéisé, ce qui est une bonne approximation dans le cas d'un assemblage non vidé (cas d'un REP en fonctionnement normal) ; si l'assemblage contient des zones vidées, à la suite d'un LOCA par exemple, ou si le réacteur contient du vide ou des milieux très transparents (Na) par construction, cette approximation peut devenir beaucoup plus discutable. Le formalisme proposé ici traite les fuites en prenant en compte l'hétérogénéité du milieu, les fuites étant traitées comme un type de réaction analogue aux autres. Ce formalisme, introduit comme module dans APOLLO-2, ne fait appel qu'à des outils de calcul très voisins de ceux utilisés dans le calcul du flux.

1993 - Commissariat à l'Energie Atomique - France

NOTE CEA-N-2707 - Pierre BENOIST, Ivan PETROVIC

"TIBERE - A CALCULATIONAL METHOD OF THE EFFECT OF LATTICE HETEROGENEITY ON THE NEUTRON LEAKAGE"

Summary - The flux calculation in a heterogeneous assembly in APOLLO and APOLLO-2 codes is based on the collision probability method. On the contrary, the neutron leakage calculation is accomplished for a flux-weighted homogenized assembly, which is a good approximation in the case of a non-voided assembly (PWR in normal conditions). If an assembly contains voided zones (for example as the consequence of LOCA) or if the reactor, in normal operation, contains void or transparent media (Na), the approximation may become much more debatable. The formalism proposed here treats the leakage taking into account the heterogeneity of the medium, the leakage being treated as a type of reaction analogous to others. This formalism is introduced in APOLLO-2 code as a module and uses only tools similar to those used for the calculation of the flux.

1993 - Commissariat à l'Energie Atomique - France

- Note CEA-N-2707 -

**Centre d'Etudes de Saclay
Direction des Réacteurs Nucléaires
Département de Mécanique et de Technologie
Service d'Etudes des Réacteurs et de Mathématiques Appliquées**

"TIBERE"

**UNE METHODE DE CALCUL DE L'EFFET DE L'HETEROGENEITE
D'UN RESEAU SUR LES FUITES DE NEUTRONS**

par

Pierre BENOIST, Ivan PETROVIC

TABLE DES MATIERES

	PAGE
1. INTRODUCTION	3
2. PRINCIPE DU LOGICIEL APOLLO-2	5
Procédure d'équivalence associée	9
3. FORMALISME B_1 HETEROGENE	11
4. UN MODELE B_1 HETEROGENE SIMPLIFIE : TIBERE	14
Quelques exemples à titre d'illustration	24
Nouvelle procédure d'équivalence	31
5. APPLICATION	34
REFERENCES	68

1. INTRODUCTION

L'intérêt croissant porté aux problèmes de sûreté des réacteurs nucléaires a conduit depuis quelques années les physiciens des réacteurs à fixer leur attention sur certains problèmes qui pouvaient à juste titre être considérés comme d'importance secondaire dans des situations de fonctionnement normal, au moins dans le cas des réacteurs à eau sous pression.

En particulier, l'effet en réactivité de l'hétérogénéité du réseau sur les fuites de neutrons, qui jouait un rôle de première importance dans les calculs de l'ancienne filière graphite-gaz, a été un peu négligé dans le calcul des réacteurs à eau sous pression, dont le degré d'hétérogénéité est beaucoup moins élevé. En effet, les codes APOLLO¹ et APOLLO-2², qui ont été à l'origine conçus pour le calcul des REP, permettent une description très fine de la carte de flux multigroupe et donc des taux de réaction dans un assemblage, mais calculent les fuites à partir d'un assemblage homogénéisé, ce qui n'est qu'une représentation très imparfaite des fuites réelles de l'assemblage hétérogène, qui tend à sous-estimer les fuites. Cette imperfection apparaît tout particulièrement lorsque le réacteur, ou certains assemblages du réacteur, comportent des milieux vides, ou presque vides (grands libres parcours), ce qui fait apparaître des phénomènes de "streaming" (mot que l'on peut traduire approximativement par "effet de couloir"), qui résultent de la propagation en ligne droite des neutrons dans le vide.

Ces milieux vides, qui existent en fonctionnement normal dans les réacteurs de l'ancienne filière graphite-gaz (le gaz pouvant être pratiquement assimilé à du vide) et dans les réacteurs plus modernes à haute température du type HTGR (à canaux ou à boulets) peuvent aussi apparaître dans les REP à la suite d'un dysfonctionnement du circuit de refroidissement (LOCA). Il en est de même dans les réacteurs à eau lourde, et aussi dans les réacteurs rapides LMFBR, à la suite d'un arrêt dans la circulation du sodium, qui fait apparaître des canaux vides, particulièrement importants dans les assemblages de contrôle ; de toute façon, même en fonctionnement normal, il apparaît un effet de "streaming" important dans les LMFBR, dû au fait que le sodium est un milieu très transparent aux neutrons.

L'effet de "streaming", entraîne toujours une diminution de la réactivité, mais il n'est qu'une des composantes de l'effet de vide global. En particulier l'effet de variation du spectre sur la réactivité, produit par la décroissance de la modération peut, suivant les cas, conduire à une diminution ou à un accroissement de la réactivité, l'accroissement pouvant se produire dans des réacteurs contenant du plutonium.

L'effet de vide global étant la somme algébrique de plusieurs effets, les uns négatifs, les autres positifs, on comprend l'importance qu'il convient d'attacher au calcul de l'effet de streaming. La même argumentation s'applique à l'effet de température.

D'autre part, l'effet de l'hétérogénéité du réseau sur les fuites influera sur la distribution de puissance.

2ème étape :

Ce milieu homogénéisé et purement réfléchi, ou encore, ce qui revient au même, homogénéisé et infini, n'est pas critique ($K \neq 1$). Pour le rendre critique, il faut introduire des fuites macroscopiques sous la forme d'un flux angulaire du type

$$\Psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi^g(\vec{\Omega}) \exp(i\vec{B} \cdot \vec{r})$$

où \vec{B} est le vecteur laplacien.

En introduisant ce flux dans l'équation de transport multigroupe en milieu homogène et infini (avec choc linéairement anisotrope), on peut déterminer analytiquement le laplacien critique B_0^2 du milieu (correspondant à $K = 1$) ; ce calcul est effectué au moyen des modules DIFFON (pour APOLLO) ou FUTES (pour APOLLO-2).

C'est la procédure dite " B_1 homogène".

D'autre part, en calculant le flux global $\Phi^g(\vec{r})$ (c'est-à-dire moyenné sur les directions)

$$\Phi^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \exp(i\vec{B} \cdot \vec{r}) \int_{4\pi} \psi^g(\vec{\Omega}) d\Omega$$

et le vecteur courant

$$\vec{J}^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \vec{\Omega} \Psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \exp(i\vec{B} \cdot \vec{r}) \int_{4\pi} \vec{\Omega} \psi^g(\vec{\Omega}) d\Omega$$

on peut déterminer le coefficient de fuite D^g du milieu homogène, par l'intermédiaire de la relation de Fick, qui est rigoureuse en milieu infini et homogène

$$\vec{J}^g = -D^g \vec{\nabla} \Phi^g$$

2. PRINCIPE DU LOGICIEL APOLLO-2

1ère étape

Le principe du logiciel APOLLO-2 (de même que celui d'APOLLO), consiste à calculer d'abord la carte de flux multigroupe (en général 99 groupes) d'un assemblage hétérogène purement réfléchi (ou ce qui revient au même d'un réseau infini de tels assemblages) au moyen de code MARSYAS ⁶ (sans approximations autres que numériques), ou encore d'un code multicellule ^{7,8} (moins coûteux car il repose sur l'approximation des courants d'interface).

Cet assemblage est composé de cellules pouvant être différentes. Le flux est régi par l'équation intégrale de transport multigroupe, qui est, dans l'approximation du choc isotrope :

$$\varphi^g(\vec{r}) = \int_{V_A} d^3r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2} \sum_{g'} \hat{\Sigma}_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r}') \varphi^{g'}(\vec{r}')$$

avec

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad R = |\vec{R}| \quad \hat{\Sigma}_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r}') = \Sigma_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r}') + \chi^g \frac{\nu \Sigma_f^{g'}(\vec{r}')}{K_\infty}$$

V_A = volume de l'assemblage, supposé réfléchi

K_∞ = facteur de multiplication infini

$\hat{\Sigma}_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r})$ = section de transfert du groupe g' vers le groupe g

$\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')$ = parcours optique entre les points \vec{r} et \vec{r}' , calculé avec la section efficace totale Σ^g du groupe g .

Après discrétisation en zones de calcul, cette équation devient :

$$V_j \Sigma_j^g \varphi_j^g = \sum_i V_i P_i^g \sum_{g'} \hat{\Sigma}_{oi}^{g' \rightarrow g} \varphi_i^{g'}$$

où V_i est le volume de la zone de calcul, i, Σ_j^g la section totale sur milieu j et P_{ij}^g la probabilité de première collision du milieu i vers le milieu j , avec la section totale du groupe g , étant toujours entendu que l'assemblage est purement réfléchi

$$P_{ij}^g = \frac{\Sigma_j^g}{V_i} \int_{V_j} d^3 r \int_{V_i} d^3 r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2}$$

La quantité $\tau^g(r, r')$ est la distance optique entre r et r' , dans le groupe g .

Les P_{ij}^g peuvent être calculés par le code MARSYAS ou par un code multicellule.

Une fois obtenue la carte de flux multigroupe dans l'assemblage réfléchi par résolution du système en φ_j^g , on peut définir un milieu homogène "équivalent" à l'assemblage par pondération des sections efficaces sur les flux

$$\bar{\Sigma}_\beta^g = \frac{\langle \Sigma_\beta^g \varphi^g \rangle_A}{\langle \varphi^g \rangle_A}$$

$$\langle \rangle_A = \int_{V_A} \dots d^3 r$$

2ème étape :

Ce milieu homogénéisé et purement réfléchi, ou encore, ce qui revient au même, homogénéisé et infini, n'est pas critique ($K \neq 1$). Pour le rendre critique, il faut introduire des fuites macroscopiques sous la forme d'un flux angulaire du type

$$\Psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi^g(\vec{\Omega}) \exp(i\vec{B} \cdot \vec{r})$$

où \vec{B} est le vecteur laplacien.

En introduisant ce flux dans l'équation de transport multigroupe en milieu homogène et infini (avec choc linéairement anisotrope), on peut déterminer analytiquement le laplacien critique B_0^2 du milieu (correspondant à $K = 1$) ; ce calcul est effectué au moyen des modules DIFFON (pour APOLLO) ou FUTES (pour APOLLO-2).

C'est la procédure dite "B₁ homogène".

D'autre part, en calculant le flux global $\Phi^g(\vec{r})$ (c'est-à-dire moyenné sur les directions)

$$\Phi^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \exp(i\vec{B} \cdot \vec{r}) \int_{4\pi} \psi^g(\vec{\Omega}) d\Omega$$

et le vecteur courant

$$\vec{J}^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \vec{\Omega} \Psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \exp(i\vec{B} \cdot \vec{r}) \int_{4\pi} \vec{\Omega} \psi^g(\vec{\Omega}) d\Omega$$

on peut déterminer le coefficient de fuite D^g du milieu homogène, par l'intermédiaire de la relation de Fick, qui est rigoureuse en milieu infini et homogène

$$\vec{J}^g = -D^g \vec{\nabla} \Phi^g$$

3ème étape :

Le laplacien critique ainsi obtenu n'est évidemment pas le laplacien fondamental de l'assemblage hétérogène réel puisque le milieu homogénéisé a été obtenu par simple pondération des sections efficaces sur la carte de flux d'un assemblage dans lequel les fuites macroscopiques provenant du facteur $\exp(\vec{iB} \cdot \vec{r})$ n'ont pas été prises en compte (1ère étape).

C'est pourquoi on refait un second calcul d'assemblage hétérogène réfléchi par la méthode des probabilités de collision (MARSYAS) en figurant ces fuites par un terme d'absorption volumique additionnel $D^g B_0^2$, où D^g et B_0^2 ont été obtenus dans la deuxième étape. En fait, pour ne pas avoir à recalculer les probabilités de collision, on conserve les sections totales de la première étape, et on diminue la section de diffusion Σ_0^g dans chaque groupe de la quantité $D^g B_0^2$ (indépendante de la variable d'espace r).

En résolvant avec ces nouvelles sections efficaces le système d'équations au flux ψ_j^g , toujours pour un assemblage purement réfléchi, on détermine une nouvelle carte de flux de l'assemblage. Cette carte de flux permet à son tour de déterminer un nouveau milieu homogène "équivalent", qui n'est pas critique.

On recommence alors la deuxième étape (détermination d'un nouveau B^2 et d'un nouveau D^g en milieu homogène) et on continue ainsi jusqu'à convergence ($K = 1$), obtenue d'ailleurs après un petit nombre d'itérations.

APOLLO-2 nous a donc permis d'obtenir la carte de flux $\psi^g(\vec{r})$ dans l'assemblage hétérogène réfléchi, le laplacien critique B^2 et le coefficient de fuite D^g de l'assemblage homogénéisé "équivalent". La quantité $D^g B^2 \psi^g(\vec{r})$ représente le taux de fuites volumiques par unité de volume de l'assemblage, dans le groupe g (en d'autres termes $D^g B^2$ représente la section efficace de fuites macroscopiques, indépendante du point \vec{r}). L'inconvénient de cette procédure provient du fait que les fuites sont calculées pour un assemblage homogénéisé, non pour l'assemblage réel ; la section efficace de fuites $D^g B^2$ devrait en effet dépendre du point \vec{r} , ce qui n'est pas le cas ici.

Procédure d'équivalence associée

Il est évident qu'un assemblage parfaitement réfléchi, ou ce qui revient au même, un réseau d'assemblages identiques, même avec une dépendance macroscopique en $\exp(i\vec{B} \cdot \vec{r})$, n'est qu'une vue de l'esprit. Dans la réalité, le réacteur est de dimensions finies, et les assemblages peuvent être différents les uns des autres (assemblages combustibles, comportant ou non des absorbeurs, des régions vidées, etc...). Le calcul direct d'un réacteur en théorie du transport étant encore, pour l'instant, hors des possibilités des ordinateurs actuels, on est conduit à remplacer, dans chaque assemblage, une "macrorégion" hétérogène, qui peut être une cellule, un ensemble de cellules ou même l'assemblage entier, par un milieu homogène équivalent. D'autre part, plutôt que d'opérer sur un grand nombre (99 par exemple) de groupes g , on sera conduit à condenser le spectre sur un petit nombre de macro-groupes d'énergie G (2 ou 4 par exemple).

En partant de la carte de flux $\vec{\varphi}^g(\vec{r})$ obtenue par APOLLO-2 après itération, on peut définir un taux de réaction "de référence" pour la réaction β , la macrorégion M et le macrogroupe G

$$T_{M,\beta}^G = \langle \sum_{\beta} \varphi^g \rangle_M^G$$

$$\langle \rangle_M^G = \sum_{g \in G} \int_V \dots d^3 r$$

Les taux de réaction $T_{M,\beta}^G$ sont définis à l'échelle d'une macrorégion (cellule ou ensemble de cellules) mais le taux de fuites volumiques (λ pour leakage)

$$T_{A,\lambda}^G = \langle D^g B_0^2 \varphi^g \rangle_A^G$$

n'est défini, dans le cadre d'APOLLO-2, qu'à l'échelle de tout l'assemblage A , supposé homogénéisé et purement réfléchi.

A partir de ces taux de réaction et de fuites, on peut définir, et c'est la première idée qui vient à l'esprit, des sections efficaces $\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G$ moyennes sur la macrorégion M et le macrogroupe G, et un coefficient des fuites moyens \bar{D}_A^G sur l'assemblage homogénéisé A, pondérés par les flux

$$\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G = \frac{T_{M,\beta}^G}{\langle \varphi \rangle_M^G} \quad \bar{D}_A^G = \frac{T_{A,1}^G}{B_0^2 \langle \varphi \rangle_A^G}$$

Il a été montré ^{9.10} que cette simple pondération par les flux ne satisfait pas l'équivalence des taux de réaction et de fuite entre le "calcul de référence" et le "macrocalcul" (c'est-à-dire le calcul de diffusion ou de transport effectué sur un assemblage réfléchi formé de macrorégions M homogénéisées et sur des macrogroupes G condensés).

L'équivalence n'est possible ^{9.10} que pour certains paramètres homogénéisés :

$\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G$ et \bar{D}_A^G définis par

$$\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G = \mu_M^G \bar{\Sigma}_{M,\beta}^G \quad \bar{D}_M^G = \mu_M^G \bar{D}_A^G$$

où μ_M^G , le facteur SPH, est obtenu par un procédé non linéaire et dépend du type de macrocalcul (diffusion, transport), ainsi que du degré de discrétisation adopté.

Cette procédure, qui est celle actuellement utilisée dans APOLLO-2, souffre cependant d'un certain manque de cohérence puisque comme nous venons de le voir, les sections efficaces équivalentes $\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G$ sont définies à partir des taux de réaction par macrorégion M, tandis que le coefficient de fuite équivalent \bar{D}_M^G est défini seulement à partir du taux de fuite globale dans l'assemblage A. Dans la pratique, ceci a peu d'incidence sur des REP en fonctionnement normal, mais peut devenir lourd de conséquences si l'assemblage contient des zones vides, ou presque vides, ce qui est précisément le problème que nous essayons de traiter ici.

C'est dans le but de traiter ces problèmes qu'une modification d'APOLLO-2 a été entreprise. Mais pour cela, il faut reprendre les fondements du modèle.

3. FORMALISME B₁ HETEROGENE.

L'équation de transport qui gouverne le flux angulaire $\Psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ dans un assemblage hétérogène s'écrit, sous sa forme intégral-différentielle

$$H\Psi = P\Psi$$

avec

$$H\Psi = \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Psi^g + \Sigma^g \Psi^g$$

et, dans l'approximation du choc linéairement anisotrope

$$P\Psi = \sum_{g'} \left[\hat{\Sigma}_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) \Phi^{g'}(\vec{r}) + \sum_1^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) \sum_k \Omega_k J_k^{g'}(\vec{r}) \right]$$

avec, Ω_k étant la composante $k = x, y, z$ du vecteur unitaire $\vec{\Omega}$

$$\Phi^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d^2\Omega$$

$$J_k^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \Omega_k d^2\Omega$$

et

$$\hat{\Sigma}_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) = \Sigma_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) + \frac{\chi^g \nu \Sigma_f^{g'}(\vec{r})}{K}$$

où K est le facteur de multiplication effectif.

Le formalisme B₁ hétérogène, qui n'est lui-même qu'une approximation car un assemblage, s'il est entouré d'assemblages différents comportera des transitoires de flux au voisinage de sa frontière, repose sur l'hypothèse suivante :

Le flux angulaire "physique" $\Psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ peut être factorisé en un flux macroscopique fondamental $\exp(i\vec{B} \cdot \vec{r})$ et un flux de structure fine $\psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ 5,20

$$\Psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \exp(i\vec{B} \cdot \vec{r}) \psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$$

où \vec{B} est le vecteur laplacien. En portant cette expression de Ψ dans l'équation intégral-différentielle du transport ci-dessus, on obtient l'équation gouvernant ψ

$$(H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}) \psi = P\psi \quad (1)$$

Dans un milieu infini d'assemblages identiques, on voit que $\psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ a la période de l'assemblage. Nous supposons ici que l'assemblage est symétrique (symétrie d'ordre 8 pour un assemblage carré par exemple).

Ce flux angulaire $\psi^g(r, \Omega)$ est complexe et peut s'écrire⁵ :

$$\psi^g = \psi_s^g - i \sum_k B_k \psi_{ak}^g \quad (k=x, y, z)$$

où $\psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ et $\psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ dépendent du vecteur \vec{B} .

On peut montrer que :

- le flux angulaire $\psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ est la somme d'un terme symétrique en r_k ($k = x, y, z$) et symétrique en Ω_k , et d'un terme antisymétrique en r_k et antisymétrique en Ω_k ;
- le flux angulaire $\psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ est la somme d'un terme antisymétrique en r_k et symétrique en Ω_k , et d'un terme symétrique en r_k et antisymétrique en Ω_k (dans les directions $k' \neq k$, $\psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ a des propriétés de symétrie analogues à celles de $\psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$).

A l'échelle de l'assemblage, le flux global $\varphi_s^g(\vec{r})$ correspondant à $\psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ sera symétrique par rapport aux trois directions k , tandis que le flux $\varphi_{ak}^g(\vec{r})$ correspondant à $\psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ sera antisymétrique par rapport à la direction k et symétrique par rapport aux deux directions $k' \neq k$. Par exemple, suivant une direction transversale $k = x$, les flux φ_s et φ_{ax} auront l'allure suivante :

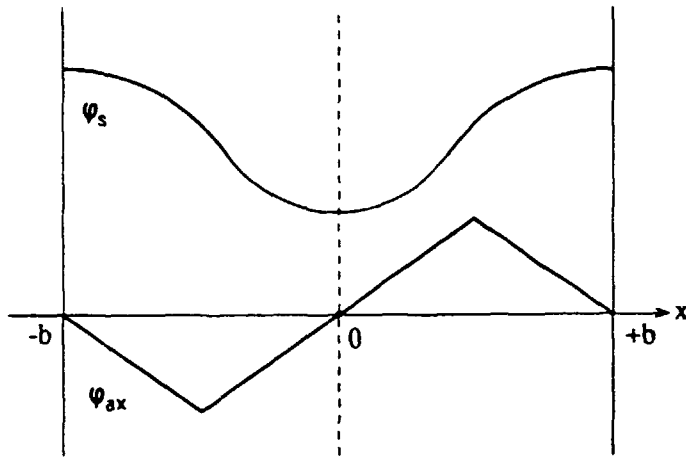


Figure 1

Le flux ψ_s a une dérivée nulle au centre $x = 0$ et aux limites $x = \pm b$ de l'assemblage.

Le flux ψ_{ak} est nul au centre $x = 0$ et aux limites $x = \pm b$ de l'assemblage.

Si les sections efficaces sont indépendantes de la direction axiale $k = z$ (problème à deux dimensions), ψ_s , ψ_{ax} et ψ_{ay} sont évidemment indépendants de z et ψ_{az} est identiquement nul par antisymétrie.

Les flux angulaires ψ_s et ψ_{ak} peuvent être choisis parmi les solutions du système B_1 hétérogène

$$\begin{cases} H\psi_s + \sum_k \sum_{k'} B_k B_{k'} \Omega_k \psi_{ak'} = P\psi_s \\ H\psi_{ak} - \Omega_k \psi_s = P\psi_{ak} \end{cases}$$

La résolution d'un tel système B_1 hétérogène (ou du système intégral équivalent) serait possible et a d'ailleurs été effectuée dans certaines géométries particulières ¹¹. Mais elle demanderait certainement un temps de calcul considérable dans des assemblages complexes.

D'autre part, comme nous l'avons vu, il faut bien être conscient du fait que la procédure B_1 hétérogène n'est elle-même qu'une approximation.

En effet, l'hypothèse de factorisation du flux suppose qu'il existe dans l'assemblage un mode fondamental unique $\exp(i\vec{B}\cdot\vec{r})$, ce qui n'est pas conforme à la réalité physique puisque les frontières de l'assemblage introduisent des transitoires qui ne sont pas pris en compte dans cette procédure.

4. UN MODELE B₁ HETEROGENE SIMPLIFIEE : TIBERE

C'est pourquoi nous proposons ici une forme simplifiée de la procédure B₁ hétérogène qui, au prix de quelques approximations, ne fait appel pratiquement qu'aux outils mathématiques existant dans APOLLO et APOLLO-2, ou à des outils mathématiques très voisins.

Pour cela, écrivons le système d'équations B₁ hétérogène sous forme explicite, étant entendu que $\hat{\Sigma}_0$ et Σ_1 sont des matrices de transfert multigroupe, que Σ est la matrice diagonale multigroupe et que les flux et les courants sont des vecteurs multigroupes

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_s + \Sigma \psi_s = \hat{\Sigma}_0 \varphi_s + \Sigma_1 \sum_k \Omega_k j_{sk} - \sum_k \sum_{k'} B_{kk'} \Omega_k \psi_{ak'} \\ \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_{ak} + \Sigma \psi_{ak} = \hat{\Sigma}_0 \varphi_{ak} + \Sigma_1 \sum_{k'} \Omega_{k'} j_{akk'} + \Omega_k \psi_s \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi_s^g(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega & j_{sk}^g(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \Omega_k d\Omega \\ \varphi_{ak}^g(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega & j_{akk'}^g(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \Omega_{k'} d\Omega \end{aligned}$$

Des considérations d'anti-symétrie, rigoureuses pour $k = z$, approchées pour $k = x, y$, permettent d'éliminer j_{sk} de la première équation, φ_{ak} de la seconde, ainsi que les termes croisés $k' \neq k$.

Dans les directions $k = x, y$, l'approximation est fondée sur l'allure anti-symétrique du flux φ_{ax} telle qu'elle apparaît sur la figure 1 ; le courant j_{axk} (pour $k \neq x$) a un comportement antisymétrique analogue (contrairement à j_{axx} qui lui, est symétrique). L'approximation consistant à négliger les termes antisymétriques dans les seconds membres du système d'équations, revient à négliger les termes de "corrélation angulaire". Ces termes ont été longuement étudiés dans le passé^{4,12,13}. On peut penser, à la lumière des résultats obtenus dans réf. 13, que pour les types d'assemblages étudiés ici, ces termes ne jouent pas un rôle considérable. Du moins, est-ce une première approximation(*) qui simplifie considérablement les calculs, mais des études ultérieures sur ce point ne seraient pas inutiles dans le contexte de ce nouveau modèle.

(*) Elle est équivalente à une "approximation du flux plat" effectuée sur les neutrons provenant de sources de scattering antisymétriques (à l'échelle de l'assemblage) ; la moyenne d'une carte de flux antisymétrique est évidemment nulle ; c'est pourquoi on ne verra apparaître dans la suite que des probabilités de première collision.

Le système d'équations devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_s + \Sigma \psi_s = \hat{\Sigma}_0 \varphi_s - \sum_k B_k^2 \Omega_k \psi_{ak} \\ \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_{ak} + \Sigma \psi_{ak} = \sum_l \Omega_l j_{akk} + \Omega_k \psi_s \end{array} \right. \quad (2)$$

Admettons, pour l'instant, (elle sera partiellement corrigée par la suite) une autre approximation(**), consistant d'une part à remplacer, dans le *second membre* de la seconde équation, $\psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ par

$$\psi_s^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega \quad (\text{approximation isotrope})$$

d'autre part, à remplacer dans le *second membre* de la première équation, $\psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ par une quantité proportionnelle à Ω_k

$$A_k^g(\vec{r}) \Omega_k$$

Comme

$$j_{akk}^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \Omega_k d\Omega = \frac{A_k^g(\vec{r})}{4\pi} \int_{4\pi} \Omega_k^2 d\Omega = \frac{A_k^g(\vec{r})}{3}$$

l'approximation consistera donc à remplacer $\psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ par

$$3 j_{akk}^g(\vec{r}) \Omega_k \quad (\text{approximation anti-isotrope})$$

dans le *second membre* de la première équation.

(**) L'approximation du flux isotrope, même corrigée par le procédé qui va suivre, pourrait peut être devenir contestable dans le cas d'un assemblage comportant des barres de contrôle très absorbantes, qui induisent une forte anisotropie du flux angulaire ; une étude approfondie de cette approximation est envisagée.

Le système d'équations s'écrit maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_s + \Sigma \psi_s = \hat{\Sigma}_0 \varphi_s - 3 \sum_k B_k^2 \Omega_k^2 j_{akk} \\ \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_{ak} + \Sigma \psi_{ak} = \sum_l \Omega_l j_{akl} + \Omega_k \varphi_s \end{array} \right. \quad (3)$$

Nous allons voir qu'il est possible de corriger cette approximation. Pour cela, considérons un assemblage homogène purement réfléchi, ou, ce qui revient au même, un milieu homogène et infini ; le système ci-dessus s'écrit, après intégration de la première équation sur $d\Omega$ et de la seconde sur $\Omega_k d\Omega$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma^H \varphi_s^H = \hat{\Sigma}_0^H \varphi_s^H - B^2 j_a^H \\ \Sigma^H j_a^H = \frac{1}{3} (\Sigma_1^H j_a^H + \varphi_s^H) \end{array} \right. \quad (4)$$

où :

$$B^2 = \sum_k B_k^2$$

Les Σ^H , φ^H et j^H sont indépendants de la variable r , si bien que le système est un simple système multigroupe ; d'autre part, en milieu homogène, le courant j_{akk} ne dépend pas de k .

On peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Sigma^H - \hat{\Sigma}_0^H) \varphi_s^H + B^2 j_a^H = 0 \\ \Sigma_{tr}^H j_a^H = \frac{\varphi_s^H}{3} \end{array} \right. \quad (5)$$

où la section efficace de transport :

$$\Sigma_{tr}^H = \Sigma^H - \frac{\Sigma_1^H}{3}$$

est une matrice de transfert multigroupe non diagonale.

La première des deux équations du système est la relation de conservation, la seconde est la relation de Fick. Notons que la relation de conservation peut s'obtenir directement dans un assemblage hétérogène réfléchi, par intégration sur $d\Omega$ et sur tout l'assemblage, de la première des équations (2) ; on ne peut au contraire rien obtenir de simple par intégration de la seconde de ces équations.

Les hypothèses d'isotropie du flux et d'anti-isotropie du courant limitent la validité du système d'équations (3), écrit pour un assemblage hétérogène. Mais, en milieu homogène, on peut, analytiquement, traiter le modèle B_1 sans faire appel à ces approximations. En effet, dans le cas homogène, l'équation B_1 (Eq. 1) se réduit à :

$$(\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}) \psi^H = \hat{\Sigma}_0^H \varphi^H + \Sigma_1^H \vec{\Omega} \cdot \vec{J}^H \quad (6)$$

L'intégration sur $d\Omega$ conduit à la première des deux relations (4), la relation de conservation ; pour obtenir une seconde équation permettant d'écrire un système B_1 homogène, il faut diviser l'équation (5) par $\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}$ et intégrer sur $d\Omega$ sur l'angle solide 4π (voir par exemple Réf. 1)

$$\varphi^H = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{d\Omega}{\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}} \hat{\Sigma}_0^H \varphi^H + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{\vec{\Omega} d\Omega}{\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}} \Sigma_1^H \cdot \vec{J}^H$$

d'où

$$\varphi_s^H = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{d\Omega}{\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}} \hat{\Sigma}_0^H \varphi_s^H - \frac{i}{4\pi} \vec{B} \cdot \int_{4\pi} \frac{\vec{\Omega} d\Omega}{\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}} \Sigma_1^H \vec{J}_a^H$$

soit

$$\varphi_s^H = \frac{C_s}{\Sigma^H} \hat{\Sigma}_0^H \varphi_s^H - \frac{B^2}{3\Sigma^{H2}} C_s \Sigma_1^H \vec{J}_a^H \quad (7)$$

avec

$$C_s = \frac{\Sigma^H}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{d\Omega}{\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}} = \frac{\Sigma^{H^2}}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{d\Omega}{\Sigma^{H^2} + (\vec{B} \cdot \vec{\Omega})^2}$$

$$C_a = \frac{3i \Sigma^{H^2}}{4\pi B^2} \int_{4\pi} \frac{\vec{B} \cdot \vec{\Omega} d\Omega}{\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}} = \frac{3\Sigma^{H^2}}{4\pi B^2} \int_{4\pi} \frac{(\vec{B} \cdot \vec{\Omega})^2 d\Omega}{\Sigma^{H^2} + (\vec{B} \cdot \vec{\Omega})^2}$$

ou encore

$$\begin{cases} C_s = \frac{\Sigma^H}{B} \operatorname{Arctg} \frac{B}{\Sigma^H} \\ C_a = \frac{3\Sigma^{H^2}}{B^2} (1 - C_s) = \frac{3\Sigma^{H^2}}{B^2} \left(1 - \frac{\Sigma^H}{B} \operatorname{Arctg} \frac{B}{\Sigma^H}\right) \end{cases} \quad (8)$$

Posons

$$\Lambda\left(\frac{B}{\Sigma^H}\right) = \frac{C_a}{C_s} = \frac{3\Sigma^H}{B} \frac{1 - \frac{\Sigma^H}{B} \operatorname{Arctg} \frac{B}{\Sigma^H}}{\operatorname{Arctg} \frac{B}{\Sigma^H}}$$

En remplaçant $\hat{\Sigma}_0 \varphi_s^H$ dans le second membre de l'équation (7) par son expression obtenue à partir de la première des relations (4) (relation de conservation), et en tirant B^2 de la seconde relation (8) pour l'introduire dans (7), on obtient l'expression (qu'on peut appeler "loi de Fick généralisée au modèle B_1 homogène")

$$\Sigma_{tr}^{H'} j_a^H = \Lambda\left(\frac{B}{\Sigma^H}\right) \frac{\varphi_s^H}{3} \quad (9)$$

où la matrice multigroupe de transport $\Sigma_{tr}^{H'}$ est définie par :

$$\Sigma_{tr}^{H'} = \Sigma^H - \Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^H} \right) \frac{\Sigma_1^H}{3}$$

La section efficace totale Σ^H est une matrice diagonale multigroupe, tandis que la section efficace Σ_1^H est une matrice multigroupe.

La relation (9) est rigoureuse en milieu homogène, par comparaison avec la seconde relation (5) qui ne l'est pas. La relation (9) est celle qui est utilisée dans le module DIFFON du logiciel APOLLO 1 et dans le module FUITES du module APOLLO-2 2, où $\frac{j_a^H}{\varphi_s^H}$ est défini comme le coefficient de diffusion D^H du milieu homogène. A la limite $\frac{B}{\Sigma^H} \rightarrow 0$, on a $\Lambda\left(\frac{B}{\Sigma^H}\right) \rightarrow 1$ et la relation (9) se réduit à la seconde relation (5), qui n'est qu'une approximation.

La relation (9) peut encore s'écrire :

$$\Sigma^H j_a^H = \Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^H} \right) \left[\frac{\Sigma_1^H}{3} j_a^H + \frac{\varphi_s^H}{3} \right] \quad (10)$$

Considérons maintenant la seconde des équations (4), qui est une approximation

$$\Sigma^H j_a^H = \frac{\Sigma_1^H}{3} j_a^H + \frac{\varphi_s}{3}$$

Nous voyons que, pour passer au B_1 homogène, qui est rigoureux (Eq. 10), il suffit de multiplier le second membre, dans chaque groupe d'énergie, par le $\Lambda\left(\frac{B}{\Sigma^H}\right)$ correspondant.

Nous nous proposons d'effectuer la même opération sur la seconde équation (3), relative à un assemblage hétérogène ; le système (3), qui n'est qu'approximatif sera alors recalé sur un B_1 homogène exact :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_s + \Sigma \psi_s = \hat{\Sigma}_0 \varphi_s - 3 \sum_k B_k^2 \Omega_k^2 j_{akk} \\ \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_{ak} + \Sigma \psi_{ak} = \Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^H} \right) \left[\sum_l \Omega_l j_{akk} + \Omega_k \varphi_s \right] \end{cases} \quad (11)$$

En pratique $\Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^H} \right)$ est voisin de l'unité.

La section efficace Σ^H dans chaque groupe g pourra être définie par simple pondération sur les flux.

Rappelons que :

$$B^2 = \sum_k B_k^2$$

Pour mettre à profit la technique des probabilités de collision, il convient de remplacer le système intégral-différentiel (11) par le système intégral équivalent, qui est linéaire

$$\begin{cases} \varphi_s^g(\vec{r}) = \int_{V_A} d^3 r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2} \left[\sum_{g'} \hat{\Sigma}_0^{g'-g}(\vec{r}') \varphi_s^{g'}(\vec{r}') - 3 \sum_k B_k^2 \Omega_k^2 j_{akk}^g(\vec{r}') \right] \\ j_{akk}^g(\vec{r}) = \Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^{Hg}} \right) \int_{V_A} d^3 r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2} \Omega_k^2 \left[\sum_{g'} \Sigma_1^{g'-g}(\vec{r}') j_{akk}^{g'}(\vec{r}') + \varphi_s^g(\vec{r}') \right] \end{cases} \quad (12)$$

L'intégration s'étend au volume V_A de l'assemblage parfaitement réfléchi, ou, ce qui revient au même, à un réseau infini d'assemblages identiques.

Un processus d'itération est évidemment nécessaire pour résoudre le système d'équations (12).

Cette procédure est actuellement au point. Le laplacien B apparaissant dans le facteur correctif $\Lambda \left(\frac{B}{\sum Hg} \right)$ sera calculé par l'APOLLO-2 classique, ce qui est une approximation suffisante, mais que l'on pourrait pousser au moyen d'une itération. Si, dans la première équation, le laplacien axial B_z^2 est supposé connu, le système permettra de déterminer le laplacien radial critique $B_r^2 = B_x^2 + B_y^2$.

La discrétisation numérique du système d'équations intégrales (12) conduit au système d'équations algébriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_j \sum_g \varphi_{s,j}^g = \sum_{i \in A} V_i \left[P_{ij}^g \sum_{g'} \sum_{o,i}^{g' \rightarrow g} \varphi_{s,i}^{g'} - \sum_k B_{ij,k}^2 P_{ij,k}^g j_{akk,i}^g \right] \\ V_j \sum_g j_{akk,j}^g = \frac{1}{3} \Lambda \left(\frac{B}{\sum Hg} \right) \sum_{i \in A} V_i P_{ij,k}^g \left[\sum_{g'} \sum_{l,i}^{g' \rightarrow g} j_{akk,i}^{g'} + \varphi_{s,i}^g \right] \end{array} \right. \quad (13)$$

Ici V_j est le volume (par unité de hauteur) de la zone de calcul j, $\varphi_{s,j}^g$ et $j_{akk,j}^g$ le flux et le courant moyen dans le volume de cette zone et dans le groupe g ; les sommations sur g' sont étendues à tous les groupes du spectre d'énergie.

Les P_{ij}^g sont les probabilités de première collision "classiques" déjà rencontrées

$$P_{ij}^g = \frac{\sum_j}{V_i} \int_{V_j} d^3 r \int_{V_i} d^3 r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2}$$

où :

$$R = |\vec{R}| \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

et où $\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')$ est le parcours optique entre \vec{r} et \vec{r}' , dans le groupe g.

Les $P_{ij,k}^g$ sont les probabilités de collisions orientées définies dans la réf. 4.

$$P_{ij,k}^g = \frac{\sum_j}{V_i} \int_{V_j} d^3 r \int_{V_i} d^3 r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2} 3\Omega_k^2$$

où Ω_k est la composante k du vecteur unitaire $\vec{\Omega}$.

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{R}}{R}$$

Dans un problème à deux dimensions x-y (c'est-à-dire lorsque les sections efficaces ne dépendent pas de la troisième dimension z), les probabilités de première collision classiques P_{ij}^g sont des intégrales faisant intervenir sous le signe somme les fonctions de Bickley (qui sont, au signe près les primitives successives de la fonction de Bessel $K_0(x)$)

$$Ki_n(x) = \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x}{\sin \theta}\right) \sin^{n-1} \theta d\theta$$

Les probabilités de première collision orientées feront intervenir les mêmes fonctions, à ceci près que, pour une direction radiale moyenne $k = r$, la fonction $Ki_n(x)$ devra être remplacée par $1/2 Ki_{n+2}(x)$, et que pour la direction axiale $k = z$, $Ki_n(x)$ devra être remplacée par $Ki_n(x) - Ki_{n+2}(x)$.

Les probabilités de collision orientées $P_{ij,k}^g$ peuvent maintenant, au même titre que les probabilités classiques P_{ij}^g être calculées au moyen du module MARSYAS du code APOLLO-2.

Cependant, dans le calcul des $P_{ij,k}^g$ une difficulté numérique supplémentaire s'est présentée, due au fait que, dans les problèmes qui nous occupent, le milieu i et (ou) le milieu j, peuvent être des milieux vides, ou presque vides (brouillard) ; il peut apparaître alors des effets de différence qui peuvent nuire à la précision ou même conduire à des résultats sans signification.

Ces difficultés numériques ont compliqué quelque peu la mise en oeuvre de MARSYAS pour le calcul des $P_{ij,k}^g$, mais elles sont maintenant levées et MARSYAS permet dorénavant ce calcul dans tous les cas ¹⁴. Notons que pour le calcul des P_{ij}^g classiques apparaissant dans le calcul de la carte de flux d'un assemblage, cette difficulté ne s'était jamais présentée car, dans le cas où i ou j sont vides, ou presque vides, les P_{ij}^g sont multipliés par une section efficace nulle ou négligeable.

Remarque :

Notons que la procédure APOLLO-2 ² de base, présentée dans la première partie, revient à résoudre par itération, au lieu du système (12), le système *non linéaire*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_s^g(\vec{r}) = \int_V d^3 r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2} \left[\sum_{g'} \hat{\Sigma}^{g'-g}(\vec{r}') \varphi_s^{g'}(\vec{r}') - B^2 \frac{j_a^{Hg}}{\varphi_s^{Hg}} \varphi_s^g(\vec{r}') \right] \\ j_a^{Hg} = \Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^{Hg}} \right) \frac{1}{3\Sigma^{Hg}} \left[\sum_{g'} \Sigma_1^{Hg'-g} j_a^{Hg'} + \varphi_s^{Hg} \right] \end{array} \right. \quad (14)$$

où apparaît un milieu homogénéisé H , dont les sections efficaces Σ^{Hg} , et $\Sigma_1^{Hg'-g}$ sont définies par pondération sur la carte de flux $\varphi_s^g(\vec{r})$; pour chaque type de réaction β , on a :

$$\Sigma_{\beta}^{Hg} = \frac{\int_V \Sigma_{\beta}^g(\vec{r}) \varphi_s^g(\vec{r}) d^3 r}{\int_V \varphi_s^g(\vec{r}) d^3 r}$$

Ce système de trois équations ne peut être résolu qu'au moyen d'une itération des modules MARSYAS (calculant la carte de flux) et FUTES (calculant le laplacien critique B^2 et le coefficient de fuite $D^{Hg} = \frac{j_a^{Hg}}{\varphi_s^{Hg}}$ du milieu homogénéisé).

L'intérêt du système (12) (ou (13) après discrétisation) obtenu par le modèle TIBERE est de calculer les fuites de l'assemblage réel, et non celles d'un milieu homogénéisé, comme dans le système (14). D'autre part, contrairement au système (14), le système (12) est *linéaire*.

Cette amélioration est particulièrement importante lorsque le coeur comporte des milieux vides ou du brouillard, mais il n'est absolument pas exclu qu'elle fasse apparaître des écarts non négligeables dans d'autres cas (assemblages contenant des barres de contrôle très absorbantes par exemple).

Quelques exemples à titres d'illustration

Le flux φ_s obtenu à partir des équations (12) ou (13) est symétrique suivant les trois directions k , et le courant j_{akk} aussi (c'est le flux φ_{ak} associé à j_{akk} qui, lui, est antisymétrique suivant la direction k et symétrique suivant les deux autres directions). Pour illustrer l'allure du flux et du courant, considérons un problème très simple, à un groupe, celui d'une cellule carrée de côté b purement réfléchissante, composée d'un milieu conservatif uniforme et d'un canal central cylindrique vide. Considérons les courbes de flux φ_s et de courant j_{akk} suivant l'une des médianes comme sur la figure 2. Le flux φ_s est évidemment uniforme. Le courant j_{azz} , de même que le courant j_{axx} ne le seront pas et comporteront une remontée vers le centre de la cellule (cette remontée est plus accusée pour j_{azz} que pour j_{axx}).

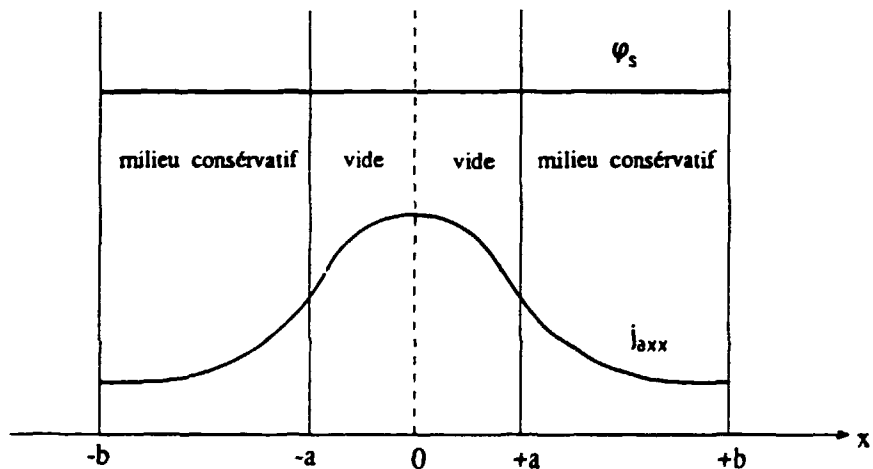


Figure 2

Dans un modèle à fuites homogènes, tel que celui d'APOLLO-2 classique (Eq. 14), le courant j_a serait uniforme et indépendant de la direction k (Eq. 14). On voit que ce n'est pas le cas dans la réalité, et la non-uniformité des courants j_{azz} et j_{axx} traduit précisément l'effet de "streaming".

Les figures 3, 4, 5, 6, 7, 8 donnent les cartes du flux φ_s , du courant axial j_{azz} et du courant radial j_{arr} le long d'une demi-médiane d'un assemblage hétérogène type de REP (17 x 17 cellules). Ces cartes de flux et de courants ont été calculées au moyen de l'équation (13), à 99 groupes, puis condensées à 2 groupes. Les figures 3 et 4 concernent un assemblage REP en situation normale, les figures 5 et 6 celles du même assemblage dans lequel l'eau a été vidangée dans la région centrale de l'assemblage (7 x 7 cellules), les figures 7 et 8 concernent un assemblage contenant des barres de contrôle d'AIC. On voit que, dans toutes les figures, la carte de flux n'est pas uniforme (puisque certaines régions sont plus absorbantes ou plus productrices de neutrons que d'autres, contrairement à l'exemple de la cellule simple précédente de la figure 2) ; les cartes des courants j_{azz} et j_{arr} ne le sont pas non plus et le rapport du courant au flux n'est pas uniforme, particulièrement dans les figures 5 et 6 qui concernent un assemblage vidé ; ce rapport serait au contraire uniforme dans la formulation APOLLO-2 classique (Eq. 14).

GRUPE RAPIDE

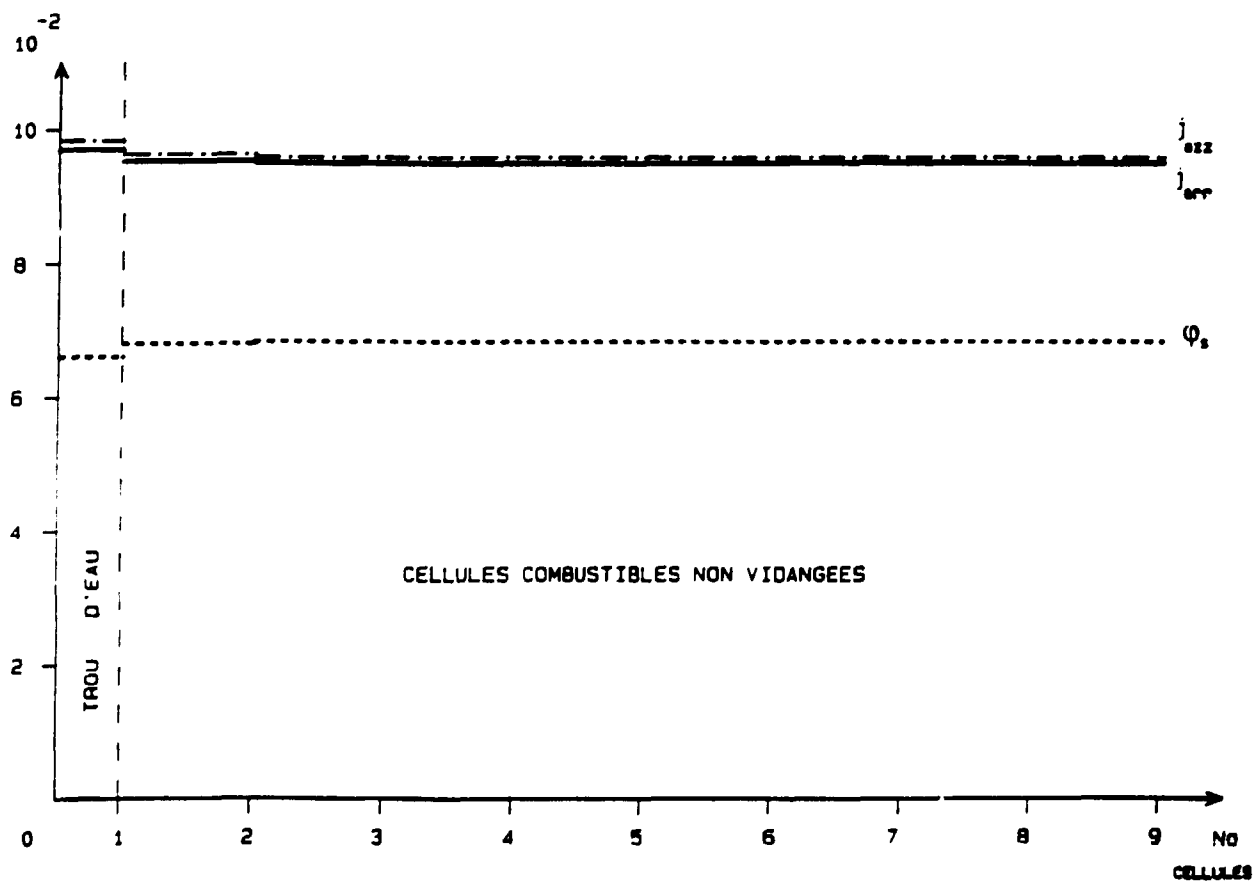


Figure 3

GRUPE THERMIQUE

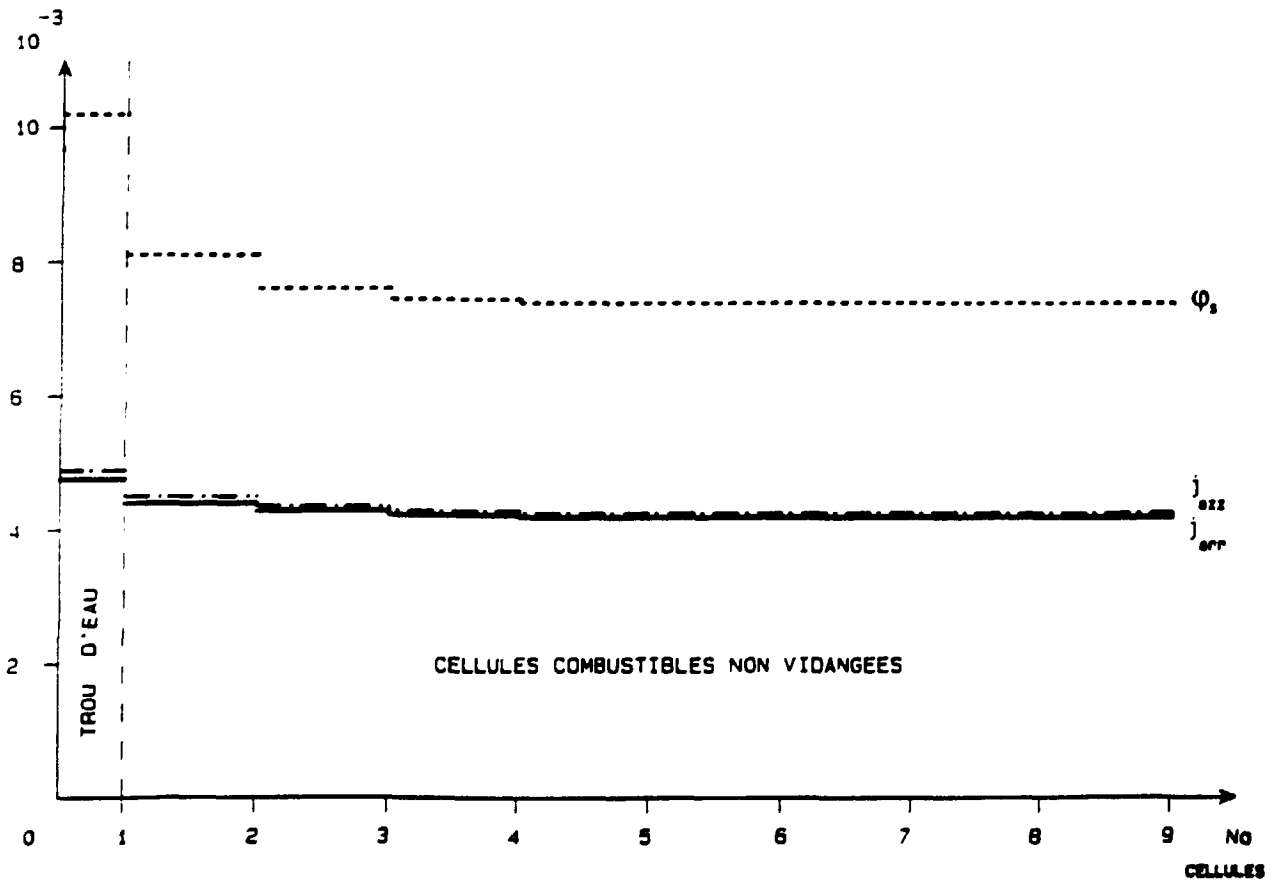


Figure 4

GRUPE RAPIDE

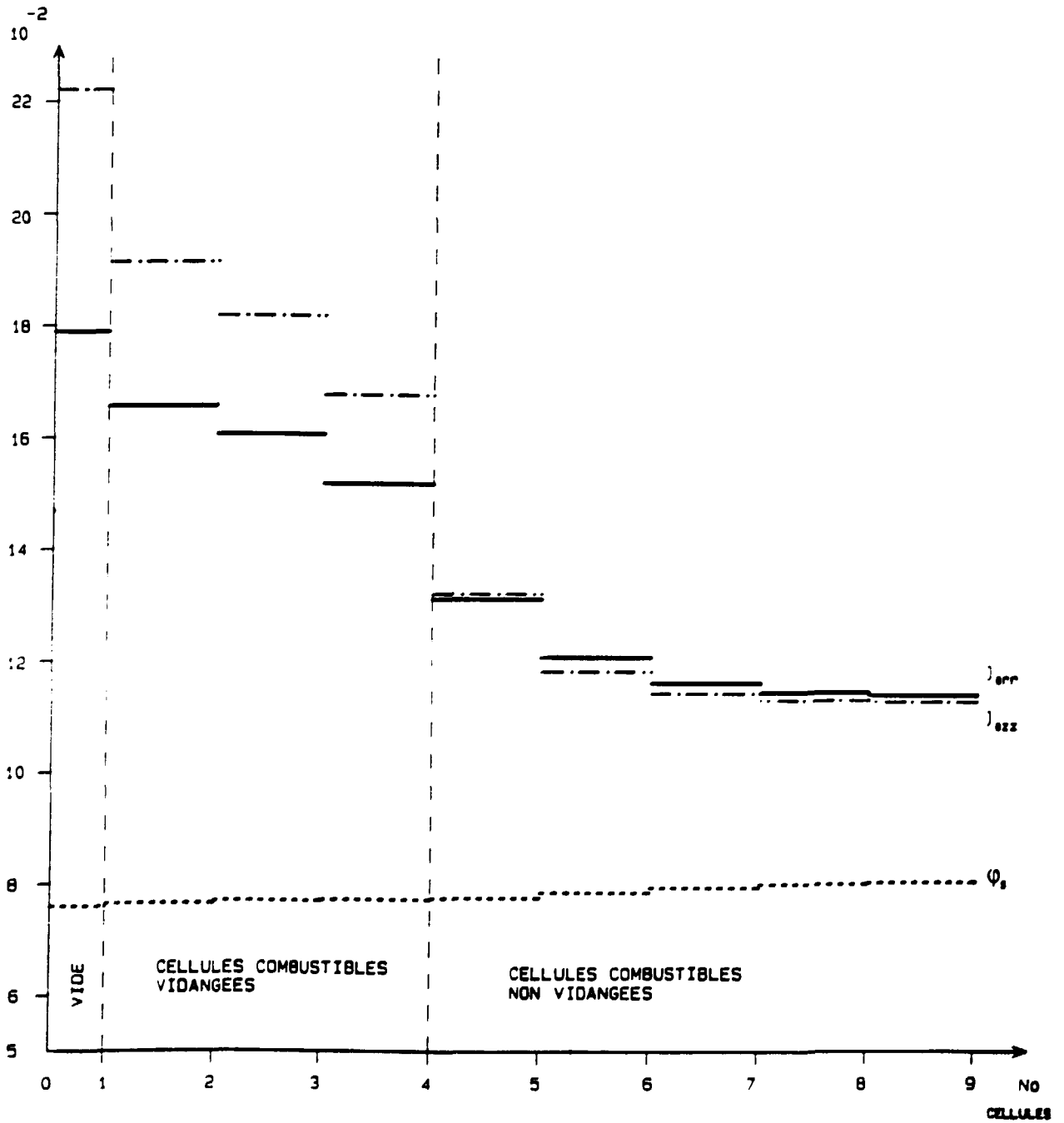


Figure 5

GRUPE THERMIQUE

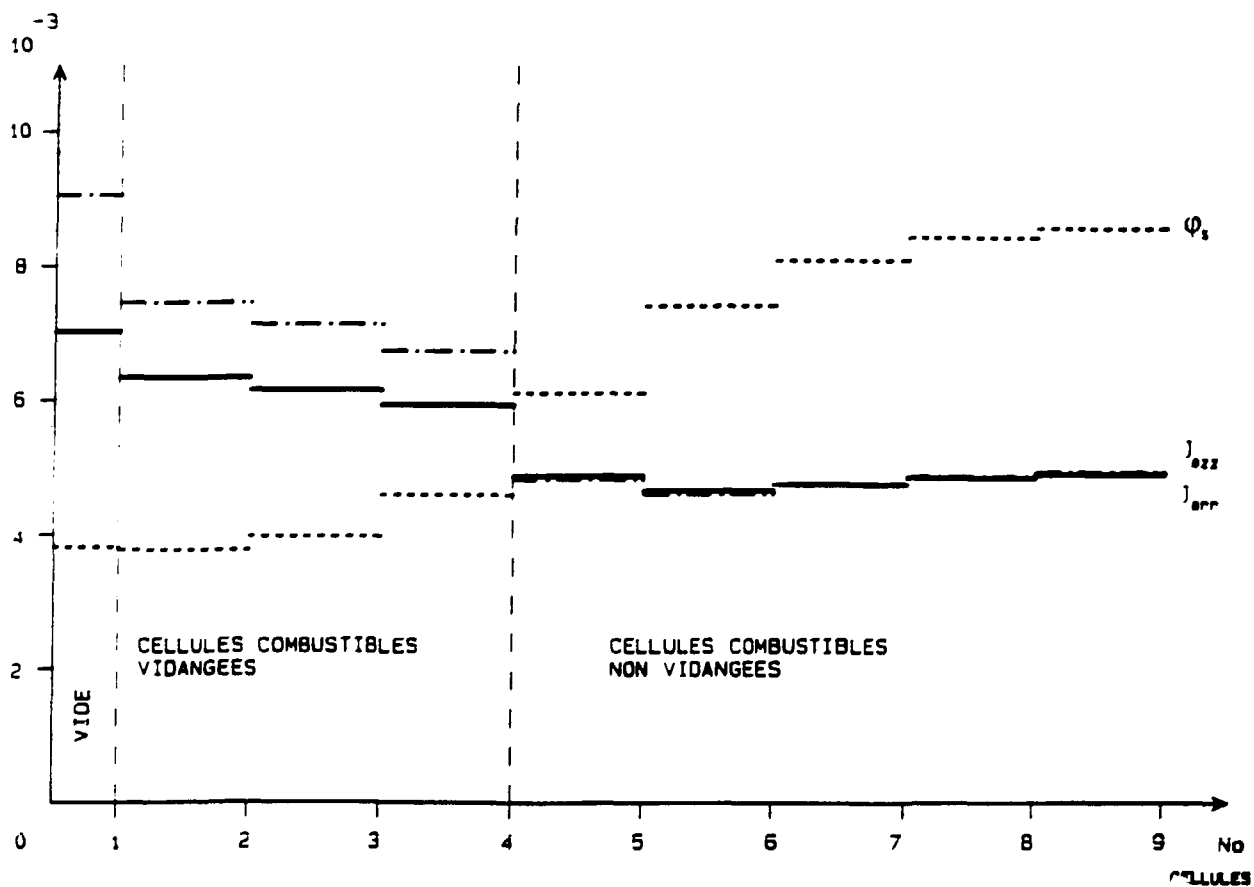


Figure 6

GRUPE RAPIDE

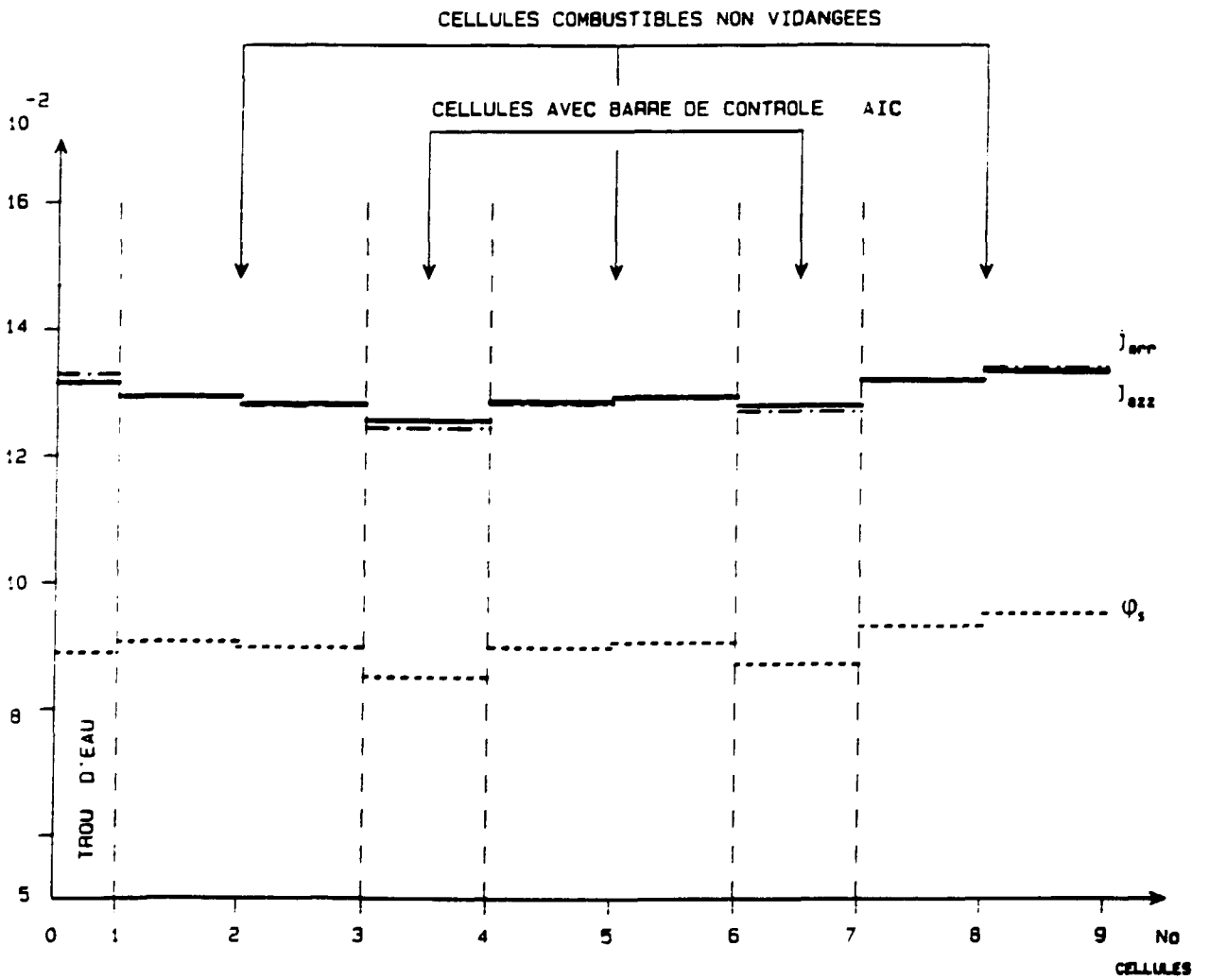


Figure 7

GROUPE THERMIQUE

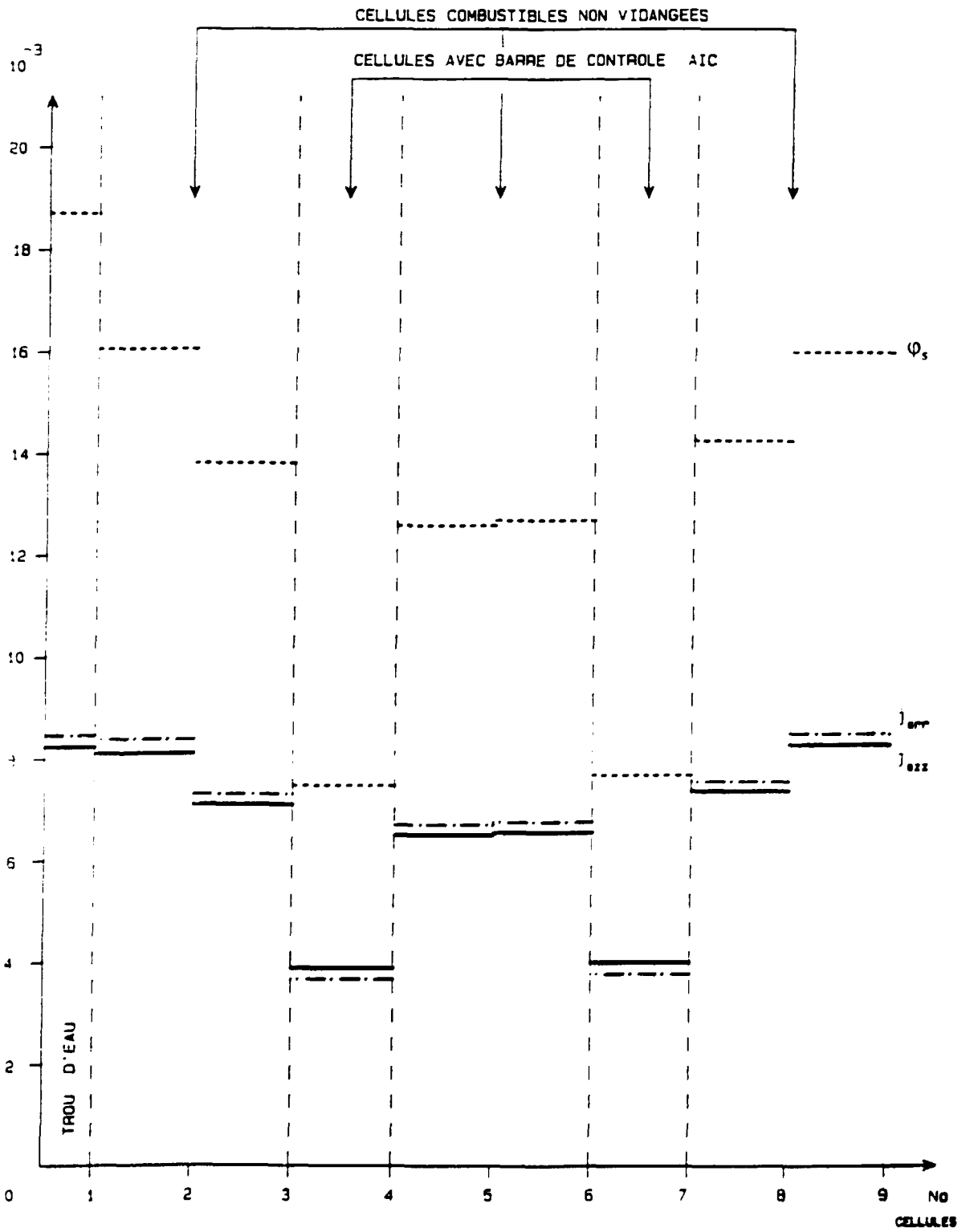


Figure 8

Nouvelle procédure d'équivalence

Le nouveau module TIBERE d'APOLLO-2 permet d'établir une procédure d'équivalence entièrement cohérente, traitant la réaction "fuites" sur le même pied que les autres réactions.

Si ψ est le flux complexe solution de l'équation (1), on peut définir un taux de réaction de référence(***) pour chaque réaction β , dans la macrorégion M et le macrogroupe G

$$T_{M,\beta}^G = \left[\sum_{\beta} \psi \right]_M^G = \left\langle \sum_{\beta} \varphi_{\beta} \right\rangle_M^G$$

avec

$$\left[\right]_M^G = \sum_{g \in G} \int_{V_M} \int_{4\pi} \dots \dots d^2 \Omega d^3 r$$

et

$$\left\langle \right\rangle_M^G = \sum_{g \in G} \int_{V_M} \dots \dots d^3 r$$

La partie antisymétrique ψ_{ak} de ψ s'annule identiquement pour toute réaction "physique" β . Le taux de référence est le même que celui défini dans la procédure d'équivalence classique.

Définissons maintenant un taux de réaction de référence $T_{M,k}^G$ pour la réaction "fuite volumique" dans la direction k, dans la macrorégion M (et non plus dans l'assemblage A) et dans le macrogroupe G ; ce taux correspond à la section efficace $iB_k \Omega_k$ apparaissant dans l'équation (1)

$$T_{M,k}^G = \left[iB_k \Omega_k \psi \right]_M^G = B_k^2 \left\langle j_{akk} \right\rangle_M^G$$

(***) La macrorégion M peut être limitée à une cellule (représentation la plus fine mais aussi la plus coûteuse), à plusieurs cellules, ou à tout l'assemblage purement réfléchi ; dans ce dernier cas, la représentation des fuites est voisine de celle proposée dans Réf. 4, le réseau répétitif de cellules étant remplacé par un réseau répétitif d'assemblages.

conformément aux définitions précédentes. Ici, c'est la contribution de la partie symétrique ψ_s de ψ qui s'annule identiquement.

La carte des flux φ_s^g et des courants j_{akk}^g est obtenue, dans chaque zone de calcul, par résolution du système (13) par un procédé itératif.

Connaissant les taux de référence $T_{M,\beta}^G$ et $T_{M,k}^G$ on peut définir des sections efficaces moyennes pour la réaction β (obtenues par pondération sur le flux) et pour la fuite dans la direction k (obtenue par pondération sur le courant) :

$$\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G = \frac{T_{M,\beta}^G}{\langle \varphi_s \rangle_M^G} \quad \bar{\Sigma}_{M,k}^G = \bar{D}_{M,k}^G B_k^2 = \frac{T_{M,k}^G}{\langle \varphi_s \rangle_M^G}$$

où $\bar{D}_{M,k}^G$ est le coefficient de fuite moyen(****).

Mais nous avons vu que cette pondération simple ne satisfait pas l'équivalence des taux de réaction et de fuite entre le calcul de référence et le "macrocalcul" (c'est-à-dire le calcul de diffusion ou de transport effectué sur un assemblage réfléchi formé de régions M homogénéisées et sur des macrogroupes condensés).

L'équivalence n'est possible que pour certaines sections efficaces homogénéisées $\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G$ et $\bar{\Sigma}_{M,k}^G$ définies par :

$$\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G = \mu_M^G \bar{\Sigma}_{M,\beta}^G \quad \bar{\Sigma}_{M,k}^G = \mu_M^G \bar{\Sigma}_{M,k}^G$$

d'où

$$\bar{D}_{M,k}^G = \mu_M^G \bar{D}_{M,k}^G$$

Le facteur SPH μ_M^G est obtenu par un procédé non linéaire et dépend du type de macrocalcul (diffusion, transport), ainsi que du degré de discrétisation adoptés.

(****) Une définition d'un coefficient de fuite (ou de diffusion) par cellule avait déjà été proposée dans Réf. 15. D'autre part, la méthode présentée dans Réf. 16 découle d'une idée apparentée à celle exposée ici, mais est moins cohérente ; elle part en effet d'une version non modifiée d'APOLLO-2, ce qui oblige, pour assurer la conservation des neutrons, à renormaliser les taux de réaction et de fuites.

Remarque :

Si le réseau infini d'assemblages identiques (réseau de référence) comporte des cavités en forme de fentes planes, ou encore des couloirs vides situés entre les éléments combustibles, permettant au neutron de s'échapper à l'infini dans un espace à deux dimensions, le modèle TIBERE conduit à une divergence analytique du courant $J_{akk}(\vec{r})$, (et donc du coefficient de fuite D_k) pour les directions de k incluses dans cette espace. Ceci provient du fait que, si c représente le milieu vide, la probabilité $P_{cc,k}$ diverge. Ce fait est bien connu depuis longtemps^{3,4}. Si le vide est remplacé par un milieu de libre parcours fini mais grand (sodium, brouillard), il n'y aura pas de divergence analytique, mais D_k sera certainement très surestimé. Cette divergence interdit dans TIBERE la vidange sur toute la section de l'assemblage; on ne peut donc vider que la partie centrale d'un assemblage, de manière à laisser suffisamment de milieu matériel dans la partie périphérique de celui-ci pour amortir les neutrons.

Pour remédier à cet état de choses, on pourrait utiliser le formalisme B_1 hétérogène, qui lui ne diverge pas à la limite vide, et, pour simplifier, retenir seulement les termes les plus bas (terme logarithmique) du développement en puissances du laplacien (méthodes DIFFAX¹⁸ et MOBIDIC¹⁹). Mais on obtient ainsi une convergence faible qui présente un aspect quelque peu artificiel.

Une autre méthode, beaucoup plus simple, consiste à prendre comme assemblage de référence un assemblage purement réfléchi non pas de façon spéculaire (équivalente à un réseau régulier d'assemblages identiques), mais un assemblage purement réfléchi dans lequel un neutron frappant la paroi rebondit de manière uniforme et isotrope. Ce choix est aussi justifié que le précédent dans les assemblages ne contenant pas de vide, mais est beaucoup plus proche de la réalité dans le cas où un assemblage vidé est entouré d'assemblages non vidés. Ce choix élimine la divergence résultant de la réflexion spéculaire, divergence introduite de façon purement artificielle et ne correspondant pas à la réalité. Par ce nouveau procédé, qui n'est pas encore mis en oeuvre, on pourra traiter le cas d'assemblages entièrement vidés (étant supposé que le coeur réel ne comporte pas deux assemblages vidés adjacents). D'autre part ce procédé simplifie les calculs, puisque l'on pourra exprimer les $P_{ij,k}$ calculés en assemblage ouvert, et tirer parti des relations de réciprocité et de conservation.

5. APPLICATIONS

La première application de cette étude sera l'interprétation, de l'expérience EPICURE réalisée sur le réacteur EOLE, au Service de Physique des Réacteurs et du Cycle à Cadarache ¹⁷. Dans cette expérience, effectuée sur un coeur de réacteur à eau de petites dimensions, l'eau a été vidée de la partie centrale du coeur (carré de 7 x 7 cellules) et remplacée, non par du vide (pour des raisons de sûreté), mais par de l'aluminium, métal dans lequel le libre parcours des neutrons est suffisamment grand (≥ 10 cm) pour que l'effet de "streaming" soit important. On pourra alors effectuer une comparaison entre les réactivités et les cartes de taux de puissance fournies par l'expérience, celles obtenues par la procédure classique d'APOLLO-2 et celles obtenues par la nouvelle procédure TIBERE d'APOLLO-2.

Dans la suite, des études sur des coeurs de réacteur de puissance seront également effectuées au moyen du nouveau modèle. Des premières estimations très approchées, effectuées à l'aide d'une version simplifiée ¹⁶ de ce modèle semblent montrer que la prise en compte de l'effet d'hétérogénéité sur les fuites de neutrons augmente celles-ci dans une proportion qui est très loin d'être négligeable tant dans le problème de la vidange des REP que dans celui du calcul des LMFBR et des HTGR.

CONTENTS

	PAGE
1. INTRODUCTION	36
2. MAIN FEATURES OF APOLLO-2 CODE	38
Associated equivalence procedure	42
3. HETEROGENEOUS B_1 FORMALISM	44
4. A SIMPLIFIED HETEROGENEOUS B_1 MODEL : TIBERE	47
Illustrative examples	57
New equivalence procedure	64
5. APPLICATION	67
REFERENCES	68

1. INTRODUCTION

The increasing interest in safety requirements of nuclear reactors has led reactor physicists, during last few years, to devote more attention to certain problems which could be reasonably considered of secondary importance in normal operation situations, at least in the case of PWRs.

In particular, the effect on reactivity of the influence of lattice heterogeneity on neutron leakage, which has been of primary importance in the calculations of old type graphite-gas reactors, seems to have been somewhat neglected in PWR assembly calculations which have a much smaller degree of heterogeneity. As a matter of fact the codes APOLLO¹ and APOLLO-2², originally created for PWR assembly calculations, give a very fine description of the multigroup flux chart and consequently of the reaction rates at the scale of assembly. On the contrary, leakages are calculated for a flux-weighted homogenized assembly, which is a rough representation of actual leakages of a heterogeneous assembly and which leads to underestimate the leakages. This imperfection appears particularly when the reactor itself or certain reactor assemblies contain voided zones or almost voided zones (great mean free path), which induces the streaming effect as a result of straight propagation of neutrons.

These voided zones, existing in normal operation in the old type graphite-gas reactors (gas may be in practice approximated by void) and in the more modern high temperature reactors as HTGR (with channel or pebble bed), may also appear in PWRs as the consequence of an accident in the cooling circuit (LOCA). It is the same with heavy water reactors, as well as with fast reactors LMFBRs as the consequence of stopping sodium circulation, which causes the appearance of voided channels, particularly important in control assemblies. Anyway, even in normal operation of LMFBRs, the streaming effect appears, due to the fact that sodium is a medium very transparent for neutrons.

The streaming effect, produces always a decrease of reactivity, but it is only one of the components of the global void effect. In particular the effect of spectrum variation on reactivity, produced by decrease of moderation may, according to the case, lead to a decrease or an increase of reactivity; in particular an increase is possible in reactors containing plutonium.

The global void effect being the algebraic sum of several effects, some being positive and the other negative, it is understandable why importance should be attached to streaming effect calculations. The same argumentation may be applied on the temperature effect.

On the other hand, the power distribution is influenced by the effect of lattice heterogeneity on the neutron leakage.

The effect of heterogeneity on the neutron leakage was taken into account in the calculation of old type graphite-gas reactors^{3,4,5}, but only regular zones containing a big number of identical cells were considered. This calculation permitted the determination of axial and radial diffusion coefficients for these regular lattices. One of contributions of APOLLO and APOLLO-2 codes, originally dedicated for PWR calculation, was precisely, to treat non regular lattices (when assemblies are not all identical) by means of an equivalence procedure.

APOLLO and APOLLO-2 codes, in the present state, calculate the neutron leakage in an imperfect manner, since this calculation as we have already seen, is made for a homogeneized assembly. Rather than correcting this imperfection by means of a posterior correction transposed from the old method dedicated to graphite-gas reactors, it seemed to us preferable to reconsider the problem so as to take into account this effect in a consistent way.

But, once more, one has to be aware that this improvement lies still on certain approximations, which would certainly be unacceptable for calculations of the old type graphite-gas reactors, but which may be considered as reasonably justified for PWRs, HTGRs and LMFBRs.

Our starting point will be APOLLO-2 code.

We will remind briefly the basis of this code, at least the procedures concerning homogeneization, neutron leakages and equivalence.

2. MAIN FEATURES OF APOLLO-2 CODE

1st step

The main features of APOLLO-2 code (as well as of APOLLO code) consists first in calculating the multigroup flux chart of a heterogeneous perfectly reflected assembly (equivalent to an infinite lattice of identical assemblies) by means of the collision probability module MARSYAS⁶ (without any approximations except numerical ones), or by a multicell module^{7,8} (less time consuming due to its approximation of interface currents).

This assembly is composed of cells which may be different. For the approximation of isotropic scattering the flux is the solution of the multigroup integral transport equation :

$$\varphi^g(\vec{r}) = \int_{V_A} d^3r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2} \sum_{g'} \hat{\Sigma}^{g' \rightarrow g}(\vec{r}') \varphi^{g'}(\vec{r}')$$

with

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad R = |\vec{R}| \quad \hat{\Sigma}_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r}') = \Sigma_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r}') + \chi^g \frac{\nu \Sigma_f^{g'}(\vec{r}')}{K_\infty}$$

V_A = volume of the reflected assembly

K_∞ = infinite multiplication factor

$\Sigma_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r})$ = transfer cross section from group g' to group g

$\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')$ = optical path between \vec{r}' and \vec{r} , calculated with the total cross section Σ^g in group g .

After discretization in calculational zones, this equation becomes :

$$V_j \Sigma_j^g \varphi_j^g = \sum_i V_i p_{ij}^g \sum_{g'} \hat{\Sigma}_{0i}^{g' \rightarrow g} \varphi_i^{g'}$$

where V_i is the volume of the calculational zone i , Σ_j^g the total cross section of zone j and P_{ij}^g is the first flight collision probability from zone i to zone j with the total cross section of group g , still assuming that the assembly is perfectly reflected

$$P_{ij}^g = \frac{\Sigma_j^g}{V_i} \int_{V_j} d^3 r \int_{V_i} d^3 r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2}$$

The quantity $\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')$ is the optical path between \vec{r} and \vec{r}' , in the group g .

The P_{ij}^g can be calculated by MARSYAS or by a multicell module.

Once, the multigroup flux chart of the reflected assembly obtained by resolution of the system for φ_j^g , one may define a homogenized medium "equivalent" to the assembly by flux weighting of cross sections corresponding to the reaction β

$$\bar{\Sigma}_\beta^g = \frac{\langle \Sigma_\beta^g \varphi^g \rangle_A}{\langle \varphi^g \rangle_A}$$

$$\langle \rangle_A = \int_V \dots d^3 r$$

2nd step :

This medium, homogenized and perfectly reflected (or, which is the same, homogenized and infinite) is not critical ($K \neq 1$). In order to make it critical, macroscopic leakages are to be introduced in such a way that the angular flux is

$$\psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi^g(\vec{\Omega}) \exp(i\vec{B} \cdot \vec{r})$$

where \vec{B} is the buckling vector.

Introducing this flux into multigroup transport equation for a homogenized and infinite medium (using the linearly anisotropic scattering approximation), one can determine analytically the critical buckling B_0^2 for the medium (corresponding to $K = 1$); this calculation is accomplished using modules DIFFON (for APOLLO) or FUITE (for APOLLO-2).

This is the procedure called "homogeneous B_1 ".

On the other hand, calculating the global flux $\Phi^g(\vec{r})$ (which is directionally averaged)

$$\Phi^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \exp(i\vec{B} \cdot \vec{r}) \int_{4\pi} \psi^g(\vec{\Omega}) d\Omega$$

and the current vector

$$\vec{J}^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \vec{\Omega} \psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \exp(i\vec{B} \cdot \vec{r}) \int_{4\pi} \vec{\Omega} \psi^g(\vec{\Omega}) d\Omega$$

one can determine the leakage coefficient D^g of a homogeneous medium using the Fick's relation, which is exact for a homogeneous and infinite medium.

$$\vec{J}^g = -D^g \vec{\nabla} \Phi^g$$

3rd step :

The critical buckling obtained in this way is obviously not the fundamental buckling of the actual heterogeneous assembly ; the homogenized medium was indeed obtained by a simple assembly flux chart weighting of cross sections and where macroscopic leakages resulting from the term $\exp(i\vec{B} \cdot \vec{r})$ were not taken into account (1st step).

Therefore the second calculation of reflected heterogeneous assembly is performed, using collision probability method (MARSYAS) and introducing leakages as an additional volumetric absorption term $D^g B_0^2$, where D^g and B_0^2 were obtained in the 2nd step. As a matter of fact, in order to avoid calculation of collision probabilities, the total cross section of the 1st step is conserved in each group by subtracting from the scattering cross section $\Sigma_0^g - \Sigma^g$ the quantity $D^g B_0^2$ (independent of space variable \vec{r}).

Solving with these new cross sections, the system of equations for φ_j^g , (the assembly still being perfectly reflected), a new flux chart of the assembly is obtained. This flux chart allows, in its turn, the determination of a new homogeneous "equivalent" medium, which is not critical.

Then, the 2nd step is repeated (determination of a new B_0^2 and of a new D^g for a homogeneous medium) and the procedure is continued, in this manner, until the convergence is attained ($K = 1$) ; in practice a small number of iterations is sufficient.

Hence, the code APOLLO-2 allowed us to obtain the flux chart $\varphi^g(\vec{r})$ in a reflected heterogeneous assembly, the critical buckling B_0^2 and the leakage coefficients D^g of the "equivalent" homogeneous assembly. The quantity $D^g B_0^2 \varphi^g(\vec{r})$ represents the volumetric leakage rate per unit volume of the assembly, in the group g (in other words, terms $D^g B_0^2$ represent the macroscopic leakage cross sections, independent of point \vec{r}). The drawback of this procedure arises from the fact that leakages are calculated for the homogenized assembly, and not for the actual assembly. The leakage cross section $D^g B_0^2$ should depend on point \vec{r} , which is not the case here.

Associated equivalence procedure

It is clear that a perfectly reflected assembly, or in other words, an infinite lattice of identical assemblies, even with the macroscopic dependence $\exp(i\vec{B} \cdot \vec{r})$, is only a view of mind. Actually, a reactor has finity dimensions, and assemblies may be different among themselves (fuel assemblies, containing or not absorbers, voided zones, etc.). The full calculation of the whole reactor by transport theory being, at least at present, beyond actual computer possibilities, it is necessary to replace, in each assembly, a heterogeneous "macroregion", which may be a cell, a group of cells or even an assembly itself, by an equivalent homogeneous medium. Moreover, instead of treating the problem in a great number (for example 99) of groups g , it is necessary to condense the spectrum into a small number of energy macrogroups G (for example 2 or 4).

Starting from the flux chart $\varphi^g(\vec{r})$, obtained by the APOLLO-2 code, it is possible to define the "reference" reaction rates for reaction β , macroregion M and macrogroup G

$$T_{M,\beta}^G = \langle \sum_{\beta}^g \varphi^g \rangle_M^G$$

$$\langle \rangle_M^G = \sum_{g \in G} \int_{V_M} \dots d^3 r$$

These reaction rates $T_{M,\beta}^G$ are defined at the scale of a macroregion (cell or group of cells), but the volumetric leakage rate (l for leakage)

$$T_{A,l}^G = \langle D^g B_0^2 \varphi^g \rangle_A^G$$

is defined, in the calculational scheme of APOLLO-2 code, only at the scale of the whole assembly A , which is supposed to be homogenized and perfectly reflected.

From these reaction and leakage rates, it is possible to define, and it is the first idea which comes to mind, the cross section $\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G$ averaged in the macroregion M and the macrogroup G and the averaged leakage coefficient \bar{D}_A^G for the homogenized assembly A, weighted by flux

$$\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G = \frac{T_{M,\beta}^G}{\langle \varphi \rangle_M^G} \quad \bar{D}_A^G = \frac{T_{A,1}^G}{B_0^2 \langle \varphi \rangle_A^G}$$

It has been shown ^{9,10}, that this simple weighting by flux does not satisfy the equivalence of reaction rates and leakage rates between the "reference calculation" and the "macrocalculation" (the macrocalculation is the diffusion or the transport calculation performed for a reflected assembly composed of homogenized macroregions M with a small number of macrogroups G).

The equivalence is only possible ^{9,10} for certain values of the homogenized parameters :

$\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G$ and \bar{D}_A^G defined as

$$\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G = \mu_M^G \bar{\Sigma}_{M,\beta}^G \quad \bar{D}_M^G = \mu_M^G \bar{D}_A^G$$

where μ_M^G is the SPH factor, obtained by a non-linear procedure and depending on the type of macrocalculation (diffusion, transport) as well as on the chosen degree of discretization.

This procedure, which is the one actually used in APOLLO-2 code, suffers, meanwhile, of a certain lack of consistency because, as we have already seen, the equivalent cross sections $\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G$ are defined for the macroregion M while the equivalent leakage coefficient \bar{D}_M^G is defined starting from the global leakage rate of the whole assembly A. In practice, this has little influence on PWR in normal operation, but may have heavy consequences if the assembly contains voided or almost voided zones, which is precisely the problem we are trying to treat here.

Since treating this problem is our aim certain modifications of APOLLO-2 code were undertaken. This is why it is necessary to consider the basis of the model.

3. HETEROGENEOUS B₁ FORMALISM

The integro-differential form of transport equation for the angular flux $\psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ in a heterogeneous assembly is

$$H\psi = P\psi$$

with

$$H\psi = \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi^g + \Sigma^g \psi^g$$

and, in the framework of the linearly anisotropic scattering approximation

$$P\psi = \sum_{g'} \left[\hat{\Sigma}_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) \phi^{g'}(\vec{r}) + \Sigma_1^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) \sum_k \Omega_k J_k^{g'}(\vec{r}) \right]$$

with, Ω_k being the component $k = x, y, z$ of the unit vector $\vec{\Omega}$

$$\phi^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d^2\Omega$$

$$J_k^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \Omega_k d^2\Omega$$

and

$$\hat{\Sigma}_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) = \Sigma_0^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) + \frac{\chi^g \nu \Sigma_f^{g'}(\vec{r})}{K}$$

where K is the effective multiplication factor.

The heterogeneous B₁ formalism (which is itself an approximation, since if an assembly is surrounded by assemblies of different types, flux transients will appear near its boundary) lies on the following hypothesis:

The "physical" angular flux $\psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ can be factorized in a fundamental macroscopic flux $\exp(i\vec{B} \cdot \vec{r})$ and in a fine structure flux $\psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ 5.20

$$\psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \exp(i\vec{B} \cdot \vec{r}) \psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$$

where \vec{B} is the bucking vector. Substituting this expression for ψ into the integro-differential transport equation, we obtain the equation for ψ

$$(H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}) \psi = P \psi \quad (1)$$

In an infinite medium of identical assemblies, $\psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ has the periodicity of the assembly. We suppose here that the assembly is symmetrical.

This angular flux $\psi^g(r, \Omega)$ is complex and can be written as⁵:

$$\psi^g = \psi_s^g + i \sum_k B_k \psi_{ak}^g \quad (k=x, y, z)$$

where $\psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ and $\psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ depend on vector \vec{B} .

It is possible to show that:

- the angular flux $\psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ is the sum of the term being symmetric in r_k ($k = x, y, z$) and symmetric in Ω_k and of the term being antisymmetric in r_k and antisymmetric in Ω_k ;
- the angular flux $\psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ is the sum of the term being antisymmetric in r_k and symmetric in Ω_k , and of the term being symmetric in r_k and antisymmetric in Ω_k (for directions $k' \neq k$, $\psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ has the symmetry properties analogous to those for $\psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$).

At the scale of assembly, the angle-integrated flux $\varphi^g(\vec{r})$ corresponding to $\psi^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ is symmetrical with respect to the three directions k , while the angle-integrated flux $\varphi_{ak}^g(\vec{r})$ corresponding to $\psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ is antisymmetrical with respect to direction k and symmetrical with respect to two directions $k' \neq k$. For example, following one transversal direction $k = x$, the fluxes φ_s and φ_{ax} have the following shape :

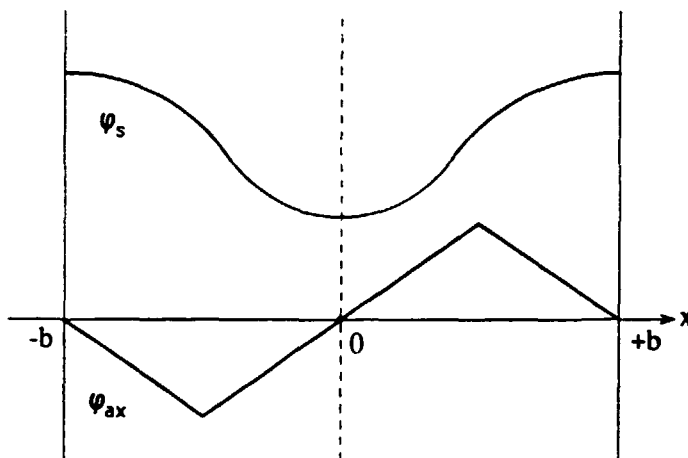


Figure 1

The derivative of the flux ψ_s is equal to zero in the center $x = 0$ and on the borders $x = \pm b$ of the assembly.

The flux ψ_{ak} is equal to zero in the center $x = 0$ and on the borders $x = \pm b$ of the assembly.

If the cross sections are independent of the axial direction $k = z$ (two dimensional problem), ψ_s , ψ_{ax} et ψ_{ay} are evidently independent of z et ψ_{az} is identically equal to zero due to antisymmetry.

The angular fluxes ψ_s and ψ_{ak} may be chosen as solutions of the B_1 heterogeneous system

$$\begin{cases} H\psi_s + \sum_k \sum_{k'} B_k B_{k'} \Omega_k \psi_{ak'} = P\psi_s \\ H\psi_{ak} - \Omega_k \psi_s = P\psi_{ak} \end{cases}$$

The resolution of such B_1 heterogeneous system (or of the equivalent integral system) would be possible and was however accomplished for certain particular geometries ¹¹. Unfortunately, this would be certainly very time consuming for the complex assemblies.

On the other hand, as we have already seen, it is necessary to be aware of the fact that the B_1 heterogeneous procedure is itself an approximation.

As a matter of fact, the hypothesis of factorizing the flux supposes the existence of the unique fundamental mode $\exp(i\vec{B} \cdot \vec{r})$, which is not in conformity with physical reality because the boundary of the assembly introduces transients which are not taken into account by this procedure.

4. A SIMPLIFIED HETEROGENEOUS B₁ MODEL : TIBERE

Therefore we propose here a simplified form of the heterogeneous B₁ procedure, which, due to some approximations, requires only mathematical tools existing already in APOLLO and APOLLO-2 codes or very similar mathematical tools.

Let us write in an explicit form the system of equations for heterogeneous B₁ formalism, where $\hat{\Sigma}_0$ et $\hat{\Sigma}_1$ are multigroup transfer matrices, where $\hat{\Sigma}$ is a multigroup diagonal matrix and where fluxes and currents are multigroup vectors

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_s + \hat{\Sigma} \psi_s = \hat{\Sigma}_0 \varphi_s + \hat{\Sigma}_1 \sum_k \Omega_k j_{sk} - \sum_k \sum_{k'} B_k B_{k'} \Omega_k \psi_{ak} \\ \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_{ak} + \hat{\Sigma} \psi_{ak} = \hat{\Sigma}_0 \varphi_{ak} + \hat{\Sigma}_1 \sum_{k'} \Omega_{k'} j_{akk'} + \Omega_k \psi_s \end{array} \right.$$

with :

$$\begin{aligned} \varphi_s^g(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega & j_{sk}^g(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \Omega_k d\Omega \\ \varphi_{ak}^g(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega & j_{akk'}^g(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \Omega_{k'} d\Omega \end{aligned}$$

The considerations of antisymmetry, rigorous for $k = z$, approximate for $k = x, y$, allow to eliminate j_{sk} from the first equation, φ_{ak} from the second, as well as cross-terms for $k' \neq k$.

In the directions $k = x, y$, the approximation is founded on the antisymmetrical shape of flux φ_{ax} as it appears in figure 1 ; the current j_{axk} (for $k \neq x$) has an analogous antisymmetrical behaviour (on the contrary to j_{axx} , which is symmetrical). This approximation, consisting in neglecting anti-symmetrical terms in the second members of the system of equations, corresponds to neglecting the "angular correlation" terms. These terms were studied for a long time in the past 4,12,13. One can think, that in the light of the results obtained in ref. 13, these terms do not have a considerable role for the types of assemblies studied here. At least, it is an approximation (*) which simplifies considerably the calculations, but in the context of this new model further studies of this point would not be unuseful.

(*) It is equivalent to a "flat flux approximation" applied on the neutrons coming from the antisymmetrical scattering sources (at the scale of an assembly) ; the average value of the antisymmetrical flux chart is evidently equal to zero ; that is why only the first flight collision probabilities will appear subsequently.

The system of equations becomes then :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_s + \Sigma \psi_s = \hat{\Sigma}_0 \psi_s - \sum_k B_k^2 \Omega_k \psi_{ak} \\ \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_{ak} + \Sigma \psi_{ak} = \sum_l \Omega_l j_{akk} + \Omega_k \psi_s \end{array} \right. \quad (2)$$

Moreover, let us suppose, for the moment, another approximation^(**), (which will be partly corrected later on), consisting, on one hand, in replacing $\psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ in the *second member* of the second equation, by

$$\psi_s^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi_s^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega \quad (\text{isotropic approximation})$$

on the other hand, in replacing $\psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ in the *second member* of the first equation, by a quantity proportional to Ω_k

$$A_k^g(\vec{r}) \Omega_k$$

As

$$j_{akk}^g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \Omega_k d\Omega = \frac{A_k^g(\vec{r})}{4\pi} \int_{4\pi} \Omega_k^2 d\Omega = \frac{A_k^g(\vec{r})}{3}$$

hence, the approximation will consist replacing $\psi_{ak}^g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ by

$$3 j_{akk}^g(\vec{r}) \Omega_k \quad (\text{anti-isotropic approximation})$$

In the second member of the first equation.

^(**) The isotropic flux approximation, even corrected by the procedure which follows, may become contestable in the case of an assembly containing very absorbing control rods, which induce a strong anisotropy of the angular flux : a careful study of this approximation is anticipated.

The system of equations may be written now as :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \psi_s + \Sigma \psi_s = \hat{\Sigma}_0 \varphi_s - 3 \sum_k B_k^2 \Omega_k^2 j_{akk} \\ \bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \psi_{ak} + \Sigma \psi_{ak} = \sum_l \Omega_l j_{akk} + \Omega_k \varphi_s \end{array} \right. \quad (3)$$

We shall see that it is possible to correct this approximation. For this, let us consider the homogeneous perfectly reflected assembly, or what is the same, the infinite homogeneous medium. The previous system, after integrating the first equation over $d\Omega$ and the second over $\Omega_k d\Omega$, can be written as

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma^H \varphi_s^H = \hat{\Sigma}_0^H \varphi_s^H - B^2 j_a^H \\ \Sigma^H j_a^H = \frac{1}{3} (\Sigma_1^H j_a^H + \varphi_s^H) \end{array} \right. \quad (4)$$

where :

$$B^2 = \sum_k B_k^2$$

The Σ^H , φ^H and j^H are independent of the variable \vec{r} , and so the system is a simple multigroup system ; on the other hand, in a homogeneous medium, the current j_{akk} does not depend on k .

Now we can write :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Sigma^H - \hat{\Sigma}_0^H) \varphi_s^H + B^2 j_a^H = 0 \\ \Sigma_{tr}^H j_a^H = \frac{\varphi_s^H}{3} \end{array} \right. \quad (5)$$

where the transport cross section :

$$\Sigma_{tr}^H = \Sigma^H - \frac{\Sigma_1^H}{3}$$

is, as a matter of fact, a multigroup transfer matrix.

The first equation of the system is the conservation relation, and the second is the Fick's relation. Let us note that the conservation relation can be obtained directly, for a heterogeneous reflected assembly, by integration of the first equation (2) over $d\Omega$ and over the whole assembly. On the contrary, one can not obtain anything simple by integration of the second equation.

The hypothesis of isotropy of flux and anti-isotropy of current limits the validity of the system of equations (3), written for a heterogeneous assembly. But, in a homogeneous medium, one can treat analytically the B_1 model without using these approximations. As a matter of fact, in the homogeneous case the B_1 equation (Eq. 1) is reduced to :

$$(\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}) \psi^H = \hat{\Sigma}_0^H \psi^H + \Sigma_1^H \vec{\Omega} \cdot \vec{J}^H \quad (6)$$

The integration over $d\Omega$ leads to the first relation (4), i. e. the conservation relation. To obtain the second equation, which will allow to write the homogeneous B_1 system, one has to divide the equation (5) by $\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}$ and to integrate it over solid angle 4π (see for example reference 1)

$$\psi^H = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{d\Omega}{\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}} \hat{\Sigma}_0^H \psi^H + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{\vec{\Omega} d\Omega}{\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}} \Sigma_1^H \cdot \vec{J}^H$$

where

$$\psi_s^H = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{d\Omega}{\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}} \hat{\Sigma}_0^H \psi_s^H - \frac{1}{4\pi} \vec{B} \cdot \int_{4\pi} \frac{\vec{\Omega} d\Omega}{\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}} \Sigma_1^H \vec{J}_a^H$$

on

$$\psi_s^H = \frac{C_s}{\Sigma^H} \hat{\Sigma}_0^H \psi_s^H - \frac{B^2}{3\Sigma^{H^2}} C_a \Sigma_1^H \vec{J}_a^H \quad (7)$$

with

$$C_s = \frac{\Sigma^H}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{d\Omega}{\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}} = \frac{\Sigma^{H^2}}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{d\Omega}{\Sigma^{H^2} + (\vec{B} \cdot \vec{\Omega})^2}$$

$$C_a = \frac{3i\Sigma^{H^2}}{4\pi B^2} \int_{4\pi} \frac{\vec{B} \cdot \vec{\Omega} d\Omega}{\Sigma^H + i\vec{B} \cdot \vec{\Omega}} = \frac{3\Sigma^{H^2}}{4\pi B^2} \int_{4\pi} \frac{(\vec{B} \cdot \vec{\Omega})^2 d\Omega}{\Sigma^{H^2} + (\vec{B} \cdot \vec{\Omega})^2}$$

or furthermore

$$\begin{cases} C_s = \frac{\Sigma^H}{B} \operatorname{Arctg} \frac{B}{\Sigma^H} \\ C_a = \frac{3\Sigma^{H^2}}{B^2} (1 - C_s) = \frac{3\Sigma^{H^2}}{B^2} \left(1 - \frac{\Sigma^H}{B} \operatorname{Arctg} \frac{B}{\Sigma^H}\right) \end{cases} \quad (8)$$

Assuming

$$\Lambda\left(\frac{B}{\Sigma^H}\right) = \frac{C_a}{C_s} = \frac{3\Sigma^H}{B} \frac{1 - \frac{\Sigma^H}{B} \operatorname{Arctg} \frac{B}{\Sigma^H}}{\operatorname{Arctg} \frac{B}{\Sigma^H}}$$

Let us replace $\hat{\Sigma}_0^H \varphi_s^H$ in the second member of the equation (7) by its expression obtained from the first equation (4) (conservation relation), and let us pull out B^2 from the second relation (8) and if we introduce it into equation (7), one obtains the expression (which can be called "generalized Fick's law for homogenized B_1 model")

$$\Sigma_{tr}^H j_a^H = \Lambda\left(\frac{B}{\Sigma^H}\right) \frac{\varphi_a^H}{3} \quad (9)$$

where the multigroup transport matrix $\Sigma_{tr}^{H'}$ is defined as :

$$\Sigma_{tr}^{H'} = \Sigma^H - \Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^H} \right) \frac{\Sigma_1^H}{3}$$

The total cross section Σ^H is a multigroup diagonal matrix while the cross section Σ_1^H is a multigroup matrix.

The relation (9) is rigorous in a homogeneous medium, in comparison with the second relation (5) which is not. The relation (9) is the one used in the module DIFFON of APOLLO code¹ and in module FUTES of APOLLO-2 code², where $\frac{j_a^H}{\varphi_s^H}$ is defined as the diffusion coefficient D^H of homogeneous medium. At the limit $\frac{B}{\Sigma^H} \rightarrow 0$, we have $\Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^H} \right) \rightarrow 1$ and the relation (9) reduces to the second relation (5), which is only approximation.

The relation (9) can be written also, as :

$$\Sigma^H j_a^H = \Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^H} \right) \left[\frac{\Sigma_1^H}{3} j_a^H + \frac{\varphi_s^H}{3} \right] \quad (10)$$

Considering now, the second equation (4), which is an approximation :

$$\Sigma^H j_a^H = \frac{\Sigma_1^H}{3} j_a^H + \frac{\varphi_s^H}{3}$$

We can see that, to proceed to homogeneous B_1 , which is rigorous (Eq.10), we have just to multiply the second member, in each group of energy, by the corresponding $\Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^H} \right)$.

We propose here to perform the same operation on the second equation (3), concerning a heterogeneous assembly. The system of equations (3), which is only approximate, will then be fitted on the exact homogeneous B_1 :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_s + \Sigma \psi_s = \hat{\Sigma}_0 \psi_s - 3 \sum_k B_k^2 \Omega_k^2 j_{akk} \\ \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_{ak} + \Sigma \psi_{ak} = \Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^H} \right) \left[\sum_l \Omega_l j_{akk} + \Omega_k \psi_s \right] \end{cases} \quad (11)$$

In practice $\Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^H} \right)$ is very near to the unity.

The cross section Σ^H in each group g can be defined by simple flux weighting.

We would like to remind that :

$$B^2 = \sum_k B_k^2$$

In order to take advantage of the collision probability technique, it is advisable to replace the integro-differential system (11) by the equivalent integral system, which is linear

$$\begin{cases} \psi_s^g(\vec{r}) = \int_{V_A} d^3 r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2} \left[\sum_{g'} \hat{\Sigma}_0^{g'-g}(\vec{r}') \psi_s^{g'}(\vec{r}') - 3 \sum_k B_k^2 \Omega_k^2 j_{akk}^g(\vec{r}') \right] \\ j_{akk}^g(\vec{r}) = \Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^{Hg}} \right) \int_{V_A} d^3 r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2} \Omega_k^2 \left[\sum_{g'} \Sigma_1^{g'-g}(\vec{r}') j_{akk}^{g'}(\vec{r}') + \psi_s^g(\vec{r}') \right] \end{cases} \quad (12)$$

The integration is extended to the volume V_A of the perfectly reflected assembly or what is the same, the infinite lattice of identical assemblies.

It is obvious that an iterative process is necessary to resolve the system of equations (12).

This procedure is actually accomplished. The buckling B appearing in the correcting factor $\Lambda \left(\frac{B}{\sum Hg} \right)$ is calculated by the classical procedure of APOLLO-2 code, which is a sufficiently good approximation, but which could be also calculated after just one iteration. If, in the first equation, the axial buckling B_z^2 is supposed to be known, the system allows to determine the critical radial buckling $B_r^2 = B_x^2 + B_y^2$.

The numerical discretization of the integral system of equations (12) leads to the algebraic system of equations :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_j \sum_j^g \varphi_{s,j}^g = \sum_{i \in A} V_i \left[p_{ij}^g \sum_{g'}^{\wedge} \sum_{o,i}^{g' \rightarrow g} \varphi_{s,i}^{g'} - \sum_k B_k^2 p_{ij,k}^g j_{akk,i}^g \right] \\ V_j \sum_j^g j_{akk,j}^g = \frac{1}{3} \Lambda \left(\frac{B}{\sum Hg} \right) \sum_{i \in A} V_i p_{ij,k}^g \left[\sum_{g'} \sum_{l,i}^{g' \rightarrow g} j_{akk,i}^{g'} + \varphi_{s,i}^g \right] \end{array} \right. \quad (13)$$

Here V_j is the volume (per unit height) of the calculational zone j , $\varphi_{s,j}^g$ and $j_{akk,j}^g$ are the average flux and current in the volume of this zone and in the group g ; the summations over g' are extended to all the groups of the energy spectrum.

The P_{ij}^g are the "classical" first flight collision probabilities, already met

$$P_{ij}^g = \frac{\sum_j}{V_i} \int_{V_j} d^3 r \int_{V_i} d^3 r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2}$$

where :

$$R = |\vec{R}| \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

and where $\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')$ is the optical path between r and r' , in the group g .

The $P_{ij,k}^g$ are the directional first flight collision probabilities defined in ref. 4

$$P_{ij,k}^g = \frac{\Sigma_j}{V_i} \int_{V_j} d^3 r \int_{V_i} d^3 r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2} 3\Omega_k^2$$

where Ω_k is the k - component of the unit vector $\vec{\Omega}$.

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{R}}{R}$$

In a two - dimensional problem x-y (when the cross sections do not depend on the third dimension Z), the classical first flight collision probabilities P_{ij}^g are the integrals in which occur, under the summation symbol, the Bickley functions (which are, except for the sign, successive primitives of the Bessel function $K_0(x)$)

$$Ki_n(x) = \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x}{\sin \theta}\right) \sin^{n-1} \theta d\theta$$

In the directional first flight collision probabilities occur the same functions, with the small difference that for the averaged radial direction $k = r$, the function $Ki_n(x)$ will have to be replaced by $1/2 Ki_{n+2}(x)$, and for the axial direction $k = z$, $Ki_n(x)$ will have to be replaced by $Ki_n(x) - Ki_{n+2}(x)$.

The directional collision probabilities $P_{ij,k}^g$ can now be calculated in the same way and at the same time as the classical probabilities P_{ij}^g , using the module MARSYAS of the APPOLO-2 code.

Meanwhile, in the calculations of $P_{ij,k}^g$ numerical difficulties arised, due to the fact that in the problems that we consider, the medium i and (or) the medium j may be voided media or almost voided media (fog). Consequently the difference effects can appear, which can spoil the accuracy of the calculation or even lead to the results without any signification.

These numerical difficulties have somewhat complicated the implementation of $P_{ij,k}^g$ calculations in the module MARSYAS, but they are now overcome and henceforth MARSYAS permits these calculations in all cases ¹⁴. We have to emphasize that in the classical P_{ij}^g calculations, appearing in the calculations of the flux chart of an assembly, this difficulty did not occur, because in the case when either i or j is void, or almost void, the P_{ij}^g are multiplied by the cross section which is equal to zero or which is negligible.

Remark :

We have to note that the base of the APOLLO-2 procedure, presented in the first part, is in fact to resolve by iterations instead of system (12), the *non-linear* system :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_s^g(\vec{r}) = \int_V d^3 r' \frac{\exp[-\tau^g(\vec{r}, \vec{r}')] }{4\pi R^2} \left[\sum_{g'} \hat{\Sigma}^{g' \rightarrow g}(\vec{r}') \varphi_s^{g'}(\vec{r}') - B^2 \frac{j_a^{Hg}}{\varphi_s^{Hg}} \varphi_s^g(\vec{r}') \right] \\ j_a^{Hg} = \Lambda \left(\frac{B}{\Sigma^{Hg}} \right) \frac{1}{3\Sigma^{Hg}} \left[\sum_{g'} \Sigma_1^{Hg' \rightarrow g} j_a^{Hg'} + \varphi_s^{Hg} \right] \end{array} \right. \quad (14)$$

where appears a homogenized medium H, with the cross section Σ^{Hg} , and $\Sigma_1^{Hg' \rightarrow g}$ defined by weighting with the flux chart $\varphi_s^g(r)$; for each type of reaction β , we have :

$$\Sigma_{\beta}^{Hg} = \frac{\int_V \Sigma_{\beta}^g(\vec{r}) \varphi_s^g(\vec{r}) d^3 r}{\int_V \varphi_s^g(\vec{r}) d^3 r}$$

This system of three equations can be solved only by an iterative procedure using modules MARSYAS (flux chart calculation) and FUTES (calculation of the critical buckling B^2 and of the leakage coefficient $D^{Hg} = \frac{j_a^{Hg}}{\varphi_s^{Hg}}$ of the homogenized medium).

The advantage of the system (12) (or (13) after discretization), obtained by the TIBERE procedure, is that it calculates the actual leakages of an assembly, and not those of a homogenized medium as it is the case with the system (14). Moreover, contrary to the system (14), the system (12) is *linear*.

This improvement is particularly important when the reactor core contains voided media or fogs, but it is not at all impossible that it would lead to significant effects in other cases (for example : assembly containing very absorbing control rods).

Illustrative examples

The flux φ_s , obtained from the equations (12) or (13), is symmetrical along three direction k , and the current j_{akk} as well (it is the flux φ_{ak} associated to j_{akk} which is, anti-symmetrical along the direction k and symmetrical along the other two directions). To illustrate the flux and the current shape, let us consider a very simple one group problem of a perfectly reflected square cell, the side having the length b , composed of a conservative uniform medium containing, in the center, a voided cylindrical channel with the radius a . Let us consider the flux φ_s and the current j_{akk} curves along one of the medians as on the figure 2. The flux φ_s is evidently uniform. The current j_{azz} , as well as the current j_{axx} , are not, and they have a peak to words the center of the cell (this peak is more important for j_{azz} than for j_{axx}).

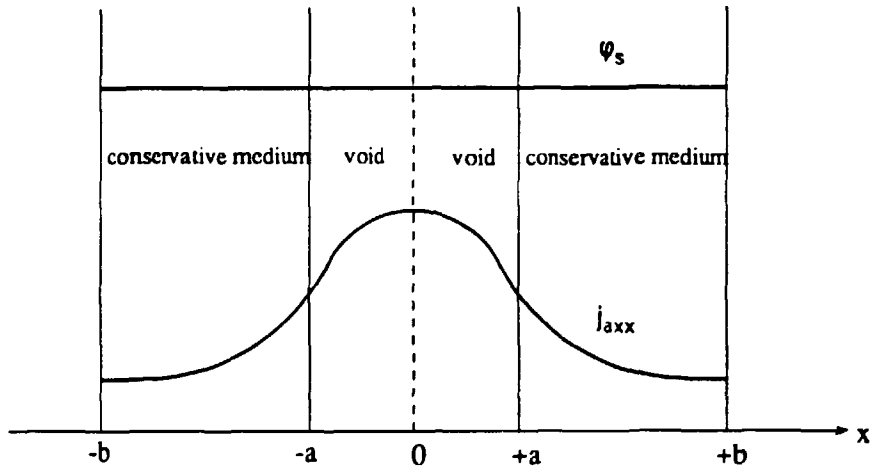


Figure 2

In a homogeneous leakage model, such as the one in the classical APOLLO-2 procedure (Eq. 14), the current j_a would be uniform and independent of the direction k (Eq. 14). The figure 2 shows that actually this is not the case, and that the non-uniformity of the currents j_{azz} and j_{axx} just illustrate the streaming effect.

The figures 3, 4, 5, 6, 7, 8 give the flux φ_s , the axial current j_{azz} and the radial current j_{arr} charts along one semi-median of a heterogeneous assembly of a PWR (17 x 17 cells). These flux and currents charts were calculated using the equation (13), in 99 groups, and then condensed into 2 groups. The figures 3 and 4 concern a PWR assembly in normal situation ; the figures 5 and 6 concern the same assembly in which the water was substituted by void in the central part of the assembly (7 x 7 cells) ; the figures 7 and 8 concern a PWR assembly containing control rods (silver-indium-cadmium). In all figures, one can see that the flux charts are not uniform (since certain regions absorb or produce more neutrons than others, which is not the case in the simple example of the figure 2). The charts of the currents j_{azz} and j_{arr} are also non uniform ; and the ratio between the current and the flux is not either, particularly in figures 5 and 6 which concern a voided assembly. On the contrary, in the classical formulation of the APOLLO-2 code (Eq. 14) this ratio would be uniform.

FAST GROUP

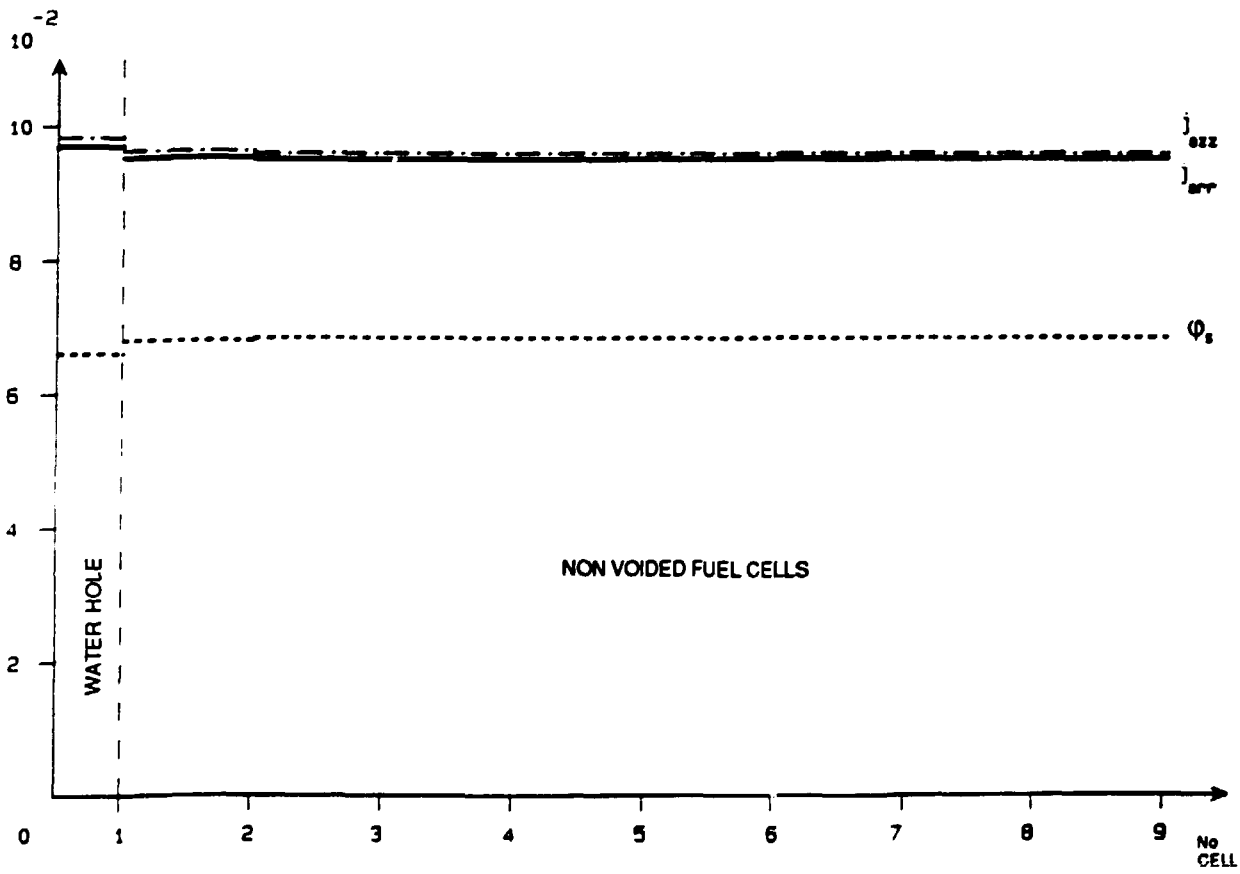


Figure 3

THERMAL GROUP

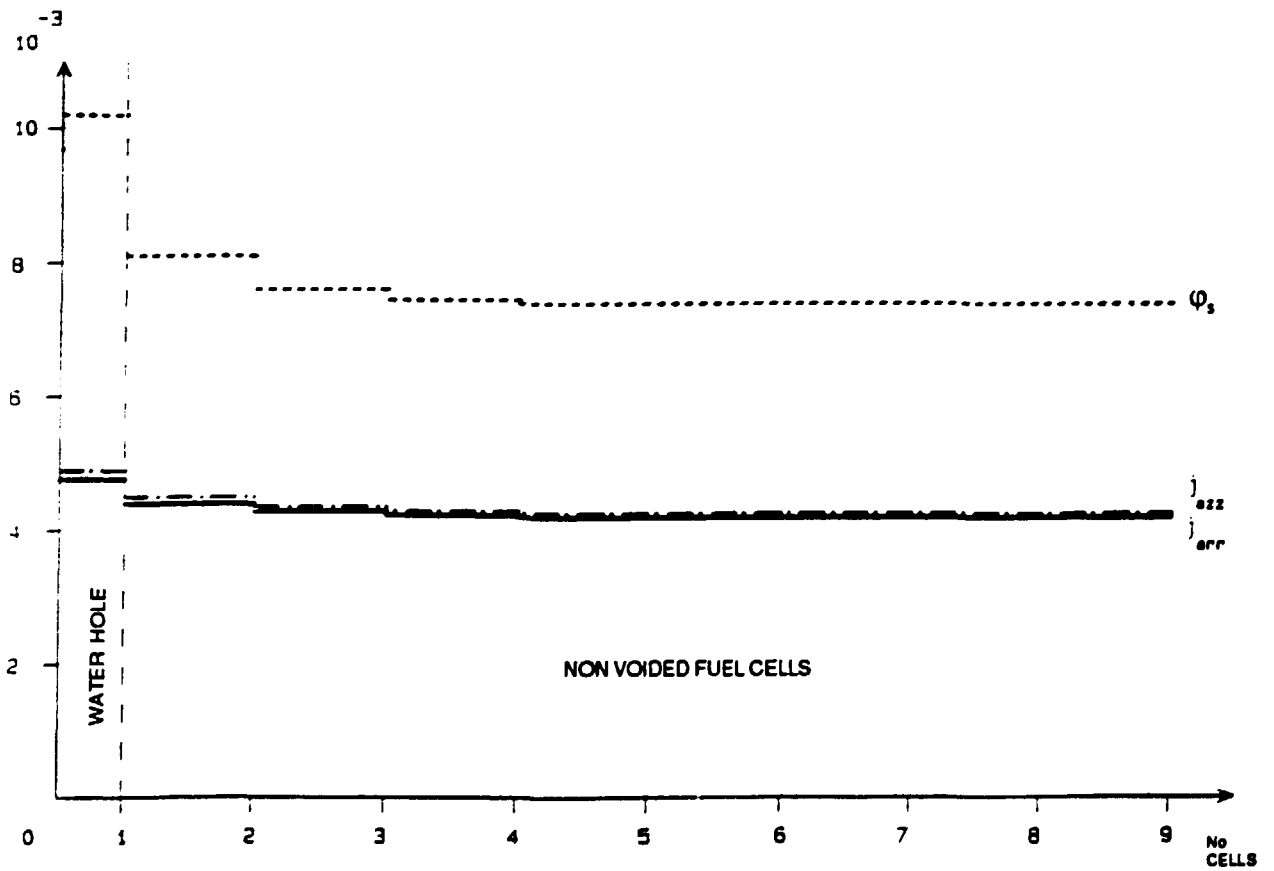


Figure 4

FAST GROUP

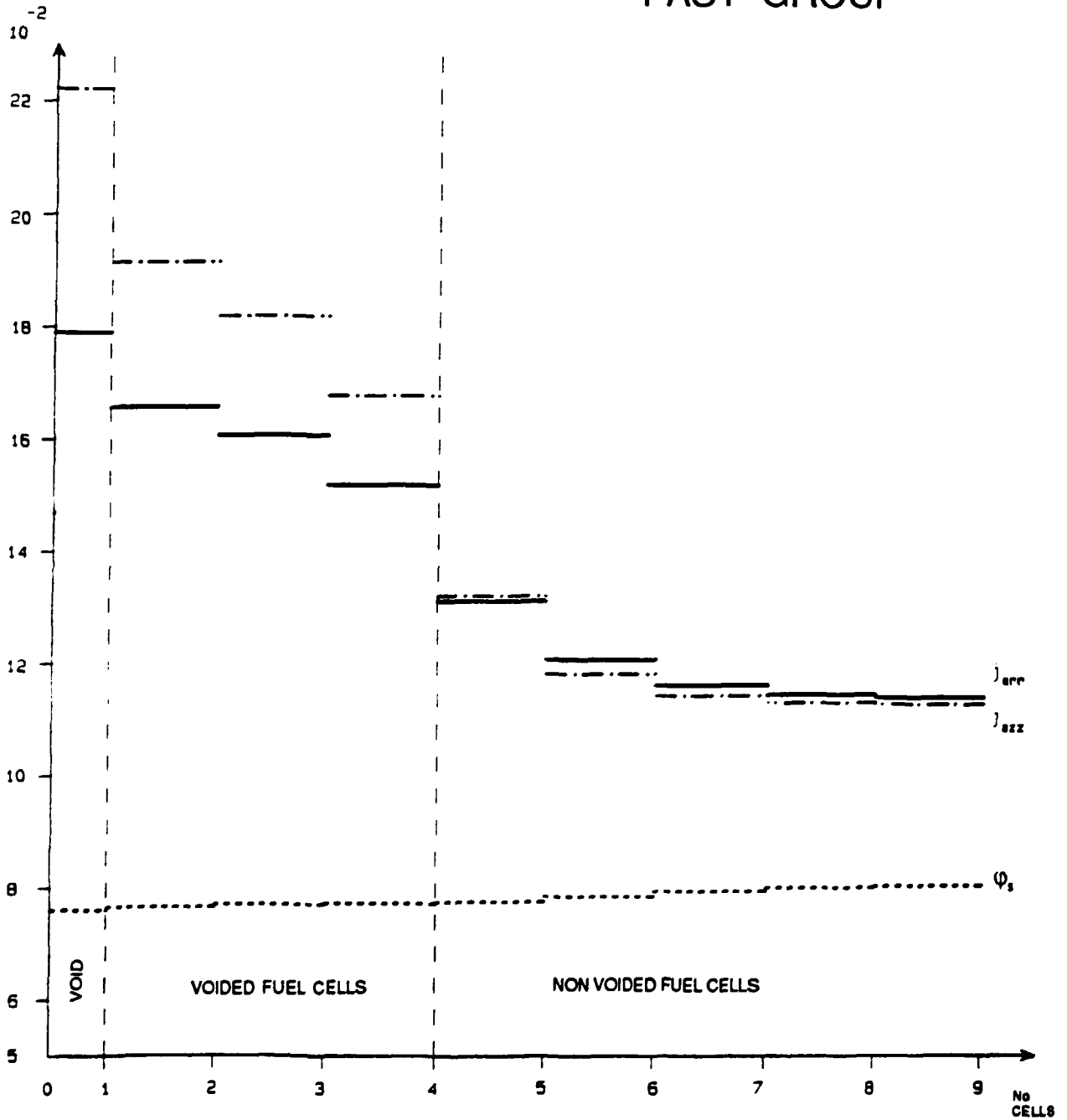


Figure 5

THERMAL GROUP

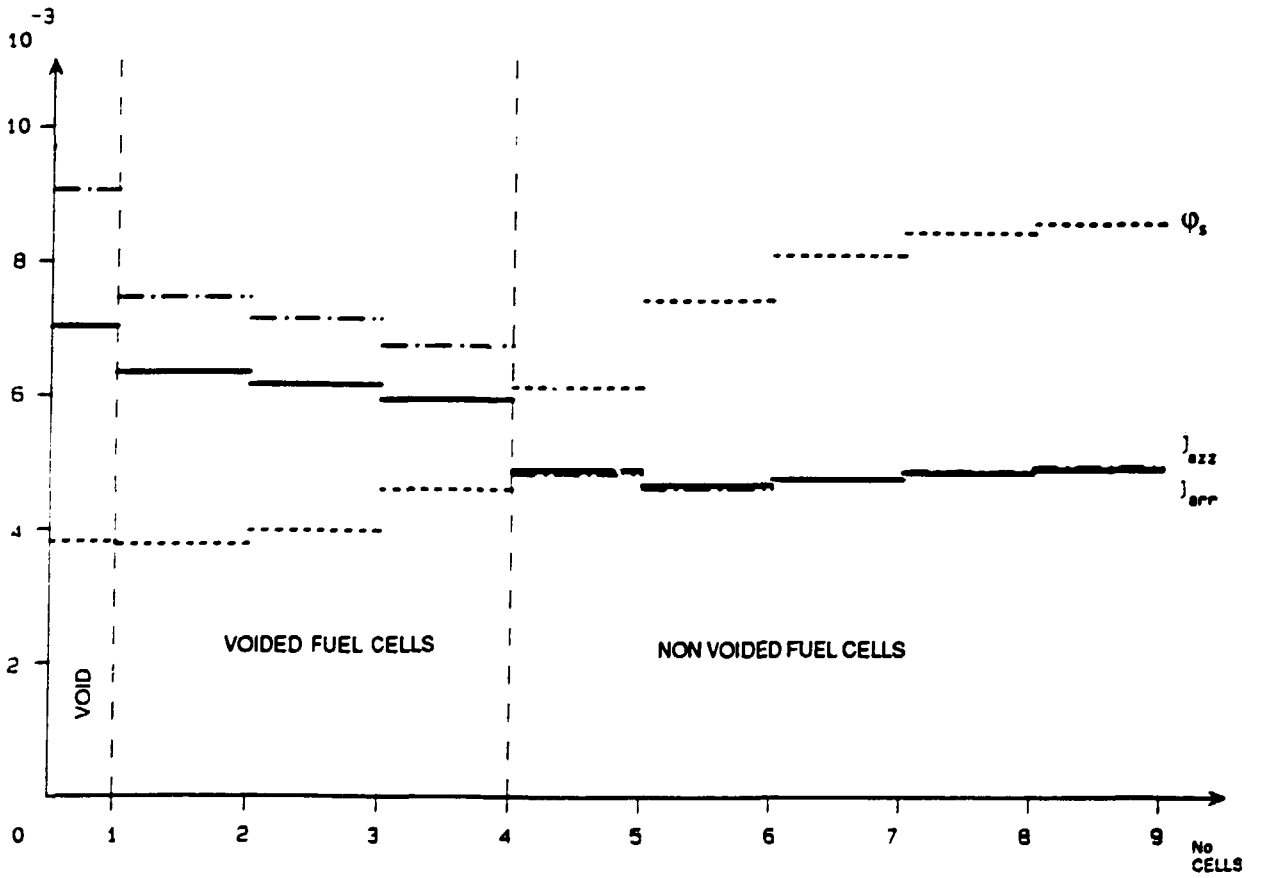


Figure 6

FAST GROUP

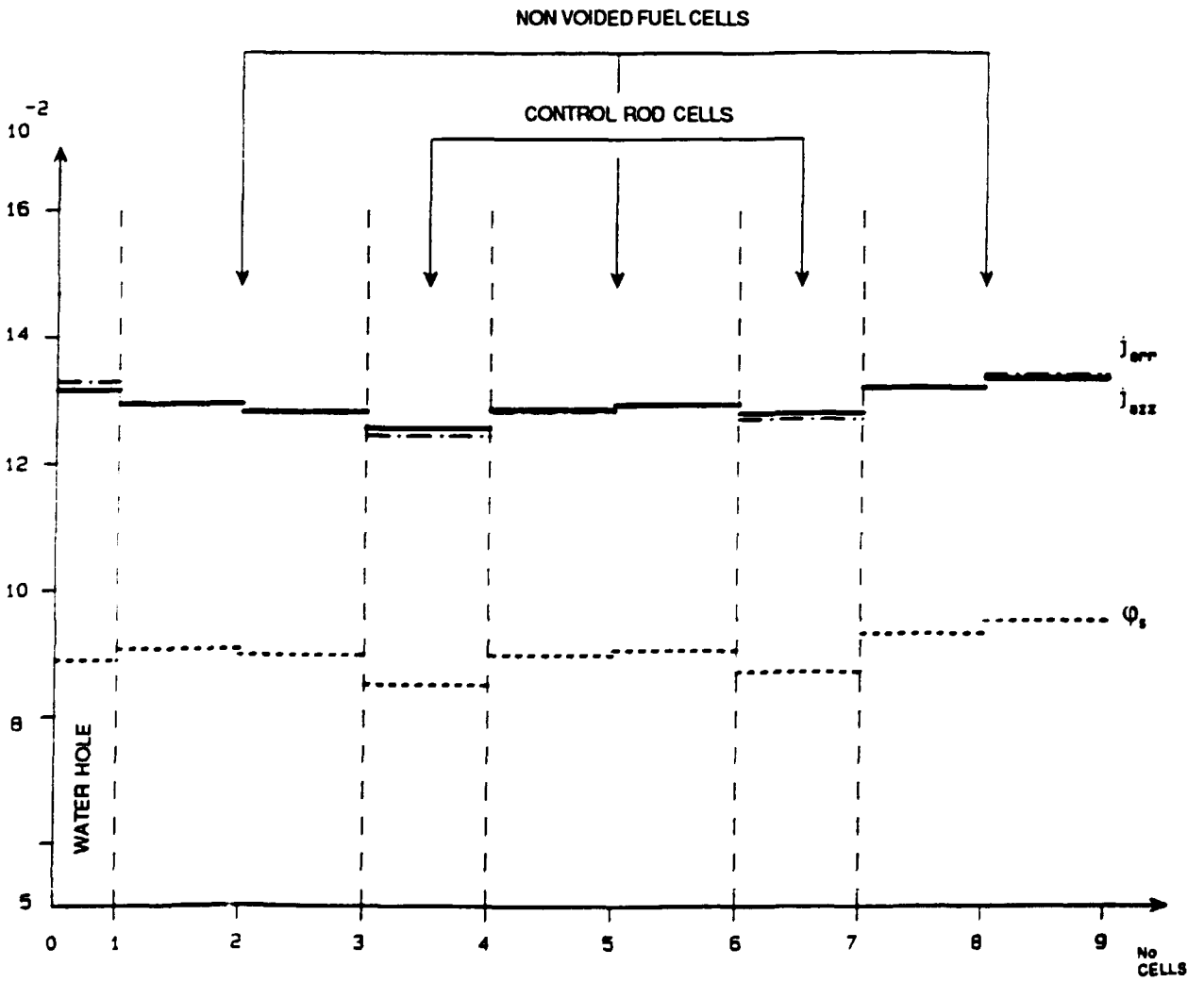


Figure 7

THERMAL GROUP

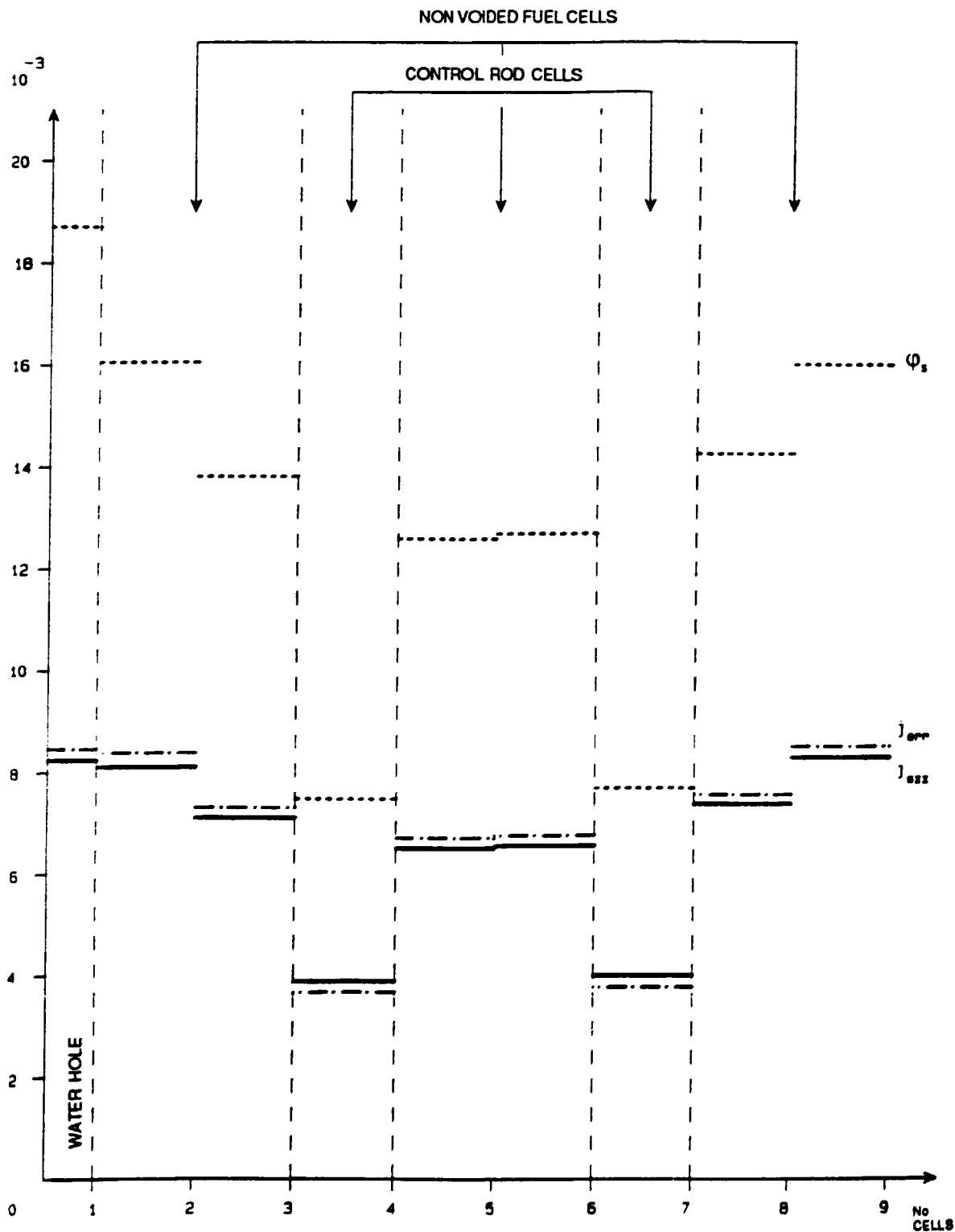


Figure 8

New equivalence procedure

The new module TIBERE of the APOLLO-2 code allows to establish a completely consistent equivalence procedure, treating the "leakage" reaction in the same manner as other reactions.

If ψ is a complex flux, as the solution of the equation (1), one can define the reference reaction rate(***) for each reaction β , in the macroregion M and in the macrogroup G, as

$$T_{M,\beta}^G = \left[\sum_{\beta} \psi \right]_M^G = \left\langle \sum_{\beta} \psi_{\beta} \right\rangle_M^G$$

with

$$\left[\right]_M^G = \sum_{g \in G} \int_{V_M} \int_{4\pi} \dots \dots d^2 \Omega d^3 r$$

and

$$\left\langle \right\rangle_M^G = \sum_{g \in G} \int_{V_M} \dots \dots d^3 r$$

The antisymmetrical part ψ_{ak} of ψ is identically equal to zero for all "physical" reactions β . The reference reaction rate is the same as the one defined in the classical equivalence procedure.

Now, let us define the reference reaction rate $T_{M,k}^G$ for the "volumetrical leakage" reaction in the direction k, in the macroregion M (and not any more in the assembly A) and in the macrogroup G. This reaction rate corresponds to the cross section $iB_k \Omega_k$ which appears in the equation (1)

$$T_{M,k}^G = \left[iB_k \Omega_k \psi \right]_M^G = B_k^2 \left\langle j_{akk} \right\rangle_M^G$$

(***) The macroregion M may be limited to one cell (which is the finest space representation but at the same time the most time consuming), to several cells, or to whole perfectly reflected assembly; in this last case, the leakage representation is near the one proposed in Ref. 4, a regular lattice of cells is replaced by a regular lattice of assemblies.

according to the previous definitions. Here, the contribution of the symmetrical part ψ_s of ψ is identically equal to zero.

The flux φ_s^g and the current j_{akk}^g charts are obtained, in each calculational zone, by solving the system (13) using an iterative procedure.

If the reference reaction rates $T_{M,\beta}^G$ and $T_{M,k}^G$ are known, one can define the averaged cross sections for the reaction β (obtained by flux weighting) and for the leakage in the direction k (obtained by current weighting) :

$$\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G = \frac{T_{M,\beta}^G}{\langle \varphi_s \rangle_M^G} \quad \bar{\Sigma}_{M,k}^G = \bar{D}_{M,k}^G B_k^2 = \frac{T_{M,k}^G}{\langle \varphi_s \rangle_M^G}$$

where $\bar{D}_{M,k}^G$ is the averaged leakage coefficient(****).

Indeed, we have already seen that this simple weighting does not satisfy the equivalence of reaction rates and leakages between the reference calculation and the "macrocalculation" (this means the diffusion or transport calculation performed on a reflected assembly composed of homogenized regions M with condensed macrogroups G).

The equivalence is possible only for certain homogeneous cross sections efficacies $\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G$ and $\bar{\Sigma}_{M,k}^G$ défined as :

$$\bar{\Sigma}_{M,\beta}^G = \mu_M^G \bar{\Sigma}_{M,\beta}^G \quad \bar{\Sigma}_{M,k}^G = \mu_M^G \bar{\Sigma}_{M,k}^G$$

where

$$\bar{D}_{M,k}^G = \mu_M^G \bar{D}_{M,k}^G$$

The SPH factor μ_M^G is obtained by a non-linear procedure and depends on the type of macrocalculation (diffusion, transport), as well as on the chosen degree of discretization.

(****) A definition of the cell leakage (or diffusion) coefficient has been already proposed in Ref. 15. On the other hand, the method presented in Ref. 16 derives from an idea related to the one presented here, but is less consistent ; as a matter of fact, this idea starts with a nonmodified version of APOLLO-2 code, which obliges, because of the condition of conservation of neutrons, to renormalize reaction and leakage rates.

Remark :

If the infinite lattice of identical assemblies (the reference lattice) contains cavities having the shape of plane slits, or voided corridors situated between fuel elements, neutrons can escape to infinity in a two-dimensional space ; in this case the TIBERE model leads to an analytical divergence of the current $j_{akk}(\vec{r})$, (and therefore of the leakage coefficient D_k) for the directions k included in this space. This arises from the fact that if c represents the voided medium, the probability $P_{cc,k}$ diverges. This fact is well known for a long time^{3,4}. If the void is replaced by a medium with a finite but big mean free path (sodium, fog), there will be no analytical divergence, but D_k will be overestimated. This divergence prohibits TIBERE the total voiding of an assembly. Therefore only the central part of an assembly may be voided, in a way to leave sufficiently of material medium in the peripheral part of this assembly so that neutrons will be damped.

To find issue from this situation, one could use the heterogeneous B_1 formalism, which does not diverge at the limit of void, and for sake of simplicity, keeps only the very low terms (logarithmical terms) of the power development of buckling (methods DIFFAX¹⁸ and MOBIDIC¹⁹). Unfortunately, in this way one obtains a weak convergence which represents a bit an artificial aspect.

Another, more simple method consists in choosing as the reference assembly, a perfectly reflected assembly not in the specular way (equivalent to a regular lattice of identical assemblies) but a perfectly reflected assembly in which the neutron hitting the inner surface is rebound in a uniform and isotropic manner. This choice is justified as well as the previous one for the assemblies not containing void, but is much more near the actual situation in the case of a voided assembly surrounded by non-voided assemblies. This choice, eliminates the divergence resulting from the specular reflection ; this divergence was introduced in a purely artificial manner which does not correspond to the actual situation. Using this new procedure, which is not yet implemented, one could treat cases with completely voided assemblies (supposing that the actual reactor core does not contain two adjacent voided assemblies). Moreover, this procedure simplifies the calculations, because one could express $P_{ij,k}$, calculated for an opened assembly and take advantage of the reciprocity and conservation relations.

5. APPLICATION

The first application of this study will be the interpretation of the EPICURE experiment, performed on the EOLE reactor in Service de Physique des Reacteurs et du Cycle at Cadarache¹⁷. In this experiment, performed on the reactor core of small size water is voided from the central part of the core (square of 7 x 7 cells) and replaced not by void (due to safety requirements), but by aluminium, a metal with a sufficiently long mean free path (≥ 10 cm), so that the streaming effect will be important. Then, one could compare reactivities and power rate charts obtained by the experiment, the classical APOLLO-2 procedure and the TIBERE procedure of the APOLLO-2 code.

Further on, the studies of power reactor cores will be also carried out by means of the new model. The very first approximate results, accomplished by a simplified version ¹⁶ of this model, seem to show that taking into account of the effect of heterogeneity on the leakage increase this leakage in a proportion which is very far from negligible, as in voiding problems of PWRs as well as in LMFBR and HTGR calculations.

REFERENCES

1. **A. HOFFMANN, F. JEANPIERRE, A. KAVENOKY, M. LIVOLANT et J. LORAIN**, "APOLLO : Code Multigroupe de Résolution de l'Equation du Transport pour les Neutrons Thermiques et Rapides". Note CEA - N - 1610, Saclay (1973).

Voir aussi :

A. KAVENOKY, "APOLLO : A General Code for Transport, Slowing-down and Thermalization Calculations in Heterogeneous Media", CONF. 73044P1, Ann Arbor, Michigan (1973).

2. **R. SANCHEZ, J. MONDOT, Z. STANKOVSKI, A. COSSIC et I. ZMIJAREVIC**, "APOLLO-2 : A User-Oriented, Portable, Modular Code for Multigroup Transport Assembly Calculations", Proc. 12th Int. Top. Mtg. Advances in Reactor Physics, Mathematics and Computation, ANS/ENS, Paris, **3**, 1563 (1987).
3. **D.J. BEHRENS**, "The Effect of Holes in a Reacting Material on the Passage of Neutrons", Proc. Phys. Soc., **62**, 607 (1949).
4. **P. BENOIST**, "Théorie du Coefficient de Diffusion des Neutrons dans un réseau comportant des cavités", Rapport CEA - R - 2278 (1964).

Voir aussi :

P. BENOIST, "Streaming Effects and Collision Probabilities in Lattices", Nucl. Sci. Eng., **34**, 285 (1968).

5. **V.C. DENIZ**, "The Theory of Neutron Leakage in Reactor Lattices", CRC Handbook of Nuclear Reactor Calculations, **II**, 409-508 (1986).

Voir aussi :

V.C. DENIZ, "A New Consistent Definition of the Homogenized Diffusion Coefficient in a Lattice", Proc. Specialists Mtg on Homogenization Method in Reactor Physics, AIEA, Lugano (1978).

6. **Z. STANKOVSKI**, "Traitement par la Méthode de Galerkin du transport des neutrons dans un milieu hétérogène à géométrie X-Y", Thèse de 3^{ème} cycle, Belgrade (1978).

Voir aussi :

A. KAVENOKY, M. LAM-HIME et Z. STANKOVSKI, "Improvements of the Integral Transport Theory Method", Proc. Top. Mtg. on Computational Methods in Transport Theory, ANS, Williamsburg, **II**, 7-55 (1979).

7. **A. SANCHEZ**, "Approximate Solutions of the Two-Dimensional Integral Transport Equations by Collision Probability Method", Nucl. Sci. Eng. **64**, 386-404 (1977).
8. **A. HEBERT**, "Développement de la Méthode SPH" : Homogénéisation de cellules dans un Réseau non Uniforme et Calcul des Paramètres de Réflecteur", Note CEA-N-2209, Saclay (1981).

9. **A. KAVENOKY**, "The SPH Homogenization Method", Proc. Specialists Mtg on Homogenization Methods in Reactor Physics, AIEA, Lugano, p. 181 (1978).
 10. **J. MONDOT**, "Détermination de constantes équivalentes pour les calculs de diffusion aux différences finies", même référence, p. 389 (1978).
 11. **M. LAM-HIME**, "Homogénéisation : Résolution de l'équation de transport en mode fondamental. Définition et calcul des coefficients de diffusion de cellules unidimensionnelles planes", Thèse du 3ème cycle. Orsay (1980).
 12. **P. BENOIST**, "Integral Transport Theory Formalism for Diffusion Coefficients Calculations in Wigner-Seitz Cells", Nucl. Sci. Eng., 77, 1-12 (1981).
 13. **C. YANG** et **P. BENOIST**, "Scattering Anisotropy and Neutron Leakage in Reactor Lattices", Nucl. Sci. Eng., 86, 47-62 (1984).
 14. **R. SANCHEZ**, Communication privée
 15. **J. ROWLANDS**, Communication privée, Winfrith (1987).
 16. **P. BENOIST**, **I. PETROVIC** et **Z. STANKOVSKI**, "Improvements in Leakage Calculations of Nuclear Reactor Assemblies and Consistent Definition of Cell Leakage Coefficients by an Equivalence Procedure", Proc. Pittsburgh (1991).
 17. **J. MONDOT**, **J.C. GAUTHIER**, **P. CHAUCHEPRAT**, **J.P. CHAUVIN**, **C. GARZENNE**, **J.C. LEFEVRE**, **A. VALLEE**, "EPICURE : An Experimental Programm Devoted to the Validation of the Calculational Schemes for Plutonium Recycling in PWRs", Proc. Int. Conf. on Reactor Physics, PHYSOR, ANS/ENS, 1, VI-53, Marseille (1990).
 18. **P. KOHLER**, **J. LIGOU**, "Axial Neutron Streaming in Gas-Cooled Reactors", Nucl. Sci. Eng., 54, 357-360 (1974).
 19. **P. BENOIST**, "A Simple Model for the Calculation of the Sodium-Voiding Effect on Neutron Leakages in a Fast Reactor Lattice, I Formalism", Nucl. Sci. Eng., 86, 22-40 (1984).
- Voir aussi :
- P. BENOIST**, **T. DURACZ**, "A Simple Model for the Calculation of the Sodium-Voiding Effect on Neutron Leakages in a Fast Reactor Lattice, II Numerical Results for H+exagonal Lattices", Nucl. Sci. Eng., 86, 41-46 (1984).
20. **D.C. LESLIE**, "The Weighting of Diffusion Coefficient in Cell Calculations", Reactor Science and Technology, 18, 1 (1962).

REMERCIEMENTS

Les auteurs expriment leurs remerciements à R. SANCHEZ qui, par une étude numérique approfondie, a levé certaines difficultés apparues dans le calcul des probabilités de collision; d'autre part, ils ont eu avec lui, ainsi qu'avec J. MONDOT, de fructueuses discussions.

Edité par
le Service de Documentation
et d'Édition Multimédia du CE Saclay
Centre d'Études de Saclay
91191 GIF-sur-YVETTE Cédex (France)