

УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊА ЛУЦИ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ ФИЗИКЕ

Весна Борка Јовановић

**СТРУКТУРА И МАСА СКАЛАРНИХ  
ТЕТРАКВАРКОВА КОЈИ САДРЖЕ  $c$ -КВАРК НА  
ОСНОВУ ФЕРМИ-БРАЈТОВЕ И ГЛОЗМАН-  
РИСКИНЕ ХИПЕРФИНЕ ИНТЕРАКЦИЈЕ**

- Докторска дисертација -

2010.



Ова докторска дисертација урађена је у Лабораторији за физику (010) Института за нуклеарне науке "Винча" у Београду. Њеном изработком руководио је проф. др Сениша Игњатовић, ванредни професор Природно-математичког факултета у Бања Луци, коме се захваљујем на подршци и сарадњи. Такође, захваљујем се проф. др Драгомиру Крпићу, редовном професору Физичког факултета у Београду и проф. др Горану Ђорђевићу, ванредном професору Природно-математичког факултета у Нишу на сугестијама у изради ове тезе.

Аутор



## САДРЖАЈ

1. УВОД .....	1
2. ЕЛЕМЕНТАРНЕ ЧЕСТИЦЕ .....	3
2.1. Лептони и кваркови .....	5
2.2. Хадрони .....	5
2.3. Изоспин .....	6
2.4. Неки квантни бројеви кваркова .....	8
3. СИСТЕМ КВАРКОВА .....	9
3.1. Јангови дијаграми .....	9
3.2. SU(3) група .....	11
3.3. Тежински дијаграми .....	13
3.4. Одређивање кваркног састава .....	14
3.5. Квантни бројеви .....	22
3.6. Мешање стања .....	23
4. ТАЛАСНЕ ФУНКЦИЈЕ .....	25
4.1. Ароматске таласне функције .....	25
4.2. Спинске таласне функције .....	32
4.3 Клебш-Горданови коефицијенти .....	33
5. ЈАКЕ ХИПЕРФИНЕ ИНТЕРАКЦИЈЕ .....	36
5.1. Ферми-Брајтова хиперфина интеракција .....	36
5.2. Глозман-Рискина хиперфина интеракција .....	41
6. МАСЕ ТЕТРАКВАРКОВА .....	47
6.1. Маса без утицаја хиперфине интеракције .....	47
6.2. Утицај Ферми-Брајтове хиперфине интеракције .....	51
6.3. Утицај Глозман-Рискине хиперфине интеракције .....	54
7. ИЗРАЧУНАВАЊЕ МАСА КОНСТИТУТИВНИХ КВАРКОВА .....	57
7.1. Фит мезона и бариона са Ферми-Брајтовом интеракцијом .....	57
7.2. Фит мезона и бариона са Глозман-Рискином интеракцијом .....	60

7.3. Процена грешки за масе конститутивних кваркова .....	63
8. МАСЕНИ СПЕКТАР $cq\bar{q}\bar{q}$ .....	65
8.1. Масени спектар са Ферми-Брајтовој интеракцијом .....	65
8.2. Масени спектар са Глозман-Рискином интеракцијом .....	73
8.3. Поређење спектра .....	78
9. МАСЕНИ СПЕКТАР СКАЛАРНОГ НОНЕТА $qq\bar{q}\bar{q}$ .....	79
10. СТАЊА $D_s^+(2317)$ , $D^0(2308)$ И $D_s^+(2632)$ .....	86
10.1 Стања $D_s^+(2317)$ , $D^0(2308)$ и $D_s^+(2632)$ .....	86
10.2. Експерименти и масени спектар .....	87
11. АЛТЕРНАТИВНА ТУМАЧЕЊА СКАЛАРНИХ СТАЊА КОЈА САДРЖЕ $c$ -КВАРК .....	88
12. ЗАКЉУЧЦИ .....	89
ЛИТЕРАТУРА .....	92
САЖЕТАК .....	94
ABSTRACT .....	95

## 1. УВОД

У овој докторској дисертацији дат је приказ шармантних  $C = 1$  скаларних тетракваркова:  $cq\bar{q}\bar{q}$ . Група "BABAR" у центру SLAC (*Stanford Linear Accelerator Center*) открила је мезон  $D_s^+(2317)$  (Aubert *et al.* 2003). Ова честица је лакша за 150 MeV него што је предвиђено кваркним моделом за  $c\bar{s}$  стање (van Beveren & Rupp 2003a,b). Мезон  $D(2308)$  открила је група "BELLE" (Mikami *et al.* 2004). Измерена разлика маса страног  $D_s(2317)$  и нестраног  $D(2308)$  мезона (9 MeV) је десетак пута мања од очекиване вредности (100-150 MeV). Ни стање  $D_s^+(2632)$ , откривено у "SELEX" експериментима (Evdokimov *et al.* 2004), се не уклапа у досадашња теоријска предвиђања јер је прелакно да би било (радијално) побуђено стање  $D_s^+(2317)$ . Ова три неслагања су довела до различитих теоретских предлога о могућој структури мезона  $D_s^+(2317)$ ,  $D^0(2308)$  и  $D_s^+(2632)$ . У овој дисертацији разматрана је могућност да су поменута стања тетракваркови, са две хиперфине интеракције (ХФИ): Ферми-Брајтовом (ФБ) и Глозман-Рискином (ГР).

Још је Џефи (Jaffe 1977a) предложио постојање четворокваркног стања за лаке аромате и дао предвиђања за спектроскопију тетракваркова. У раду (Jaffe 1977b) дата је класификација стања са два кварка и два антикварка. У радовима (van Beveren & Rupp 2003a,b, van Beveren *et al.* 2006)  $D_s^+(2317)$  мезон је објашњен као скаларни  $c\bar{s}$  систем: претпостављајући да је овај мезон заиста шарм-антистрана комбинација, ван Беверен и сарадници објашњавају да ако се урачунају јаке интеракције одговорне за креацију и анихилацију додатних кварк-антикварк парова, маса се добија у очекиваном опсегу. По ван Беверену и Рупу (van Beveren & Rupp 2004) и Барнсу и сарадницима (Barnes *et al.* 2004), резонанца  $D_s^+(2632)$  која је 0.52 GeV тежа од  $D_s$  основног стања могла би да буде прво радијално побуђење  $D_s(2112)$  мезона. Вијанде и сарадници (Vijande *et al.* 2006, 2007) предлажу да се ова стања разматрају као мешавина конвенционалних кварк-антикварк стања и тетракваркова: на тај начин објашњавају неочекиване мале масе и ширине распада за  $D_s^+(2317)$  и  $D^0(2308)$ . Такође постоје и модели мезонских молекула (Swanson 2006, Szczepaniak 2003, Hwang & Kim 2005). С друге стране, Терасаки и Хајашигаки (Hayashigaki & Terasaki 2005, Terasaki 2004a, Terasaki 2006) сврставају  $D_s^+(2317)$  мезон у групу  $cq\bar{q}\bar{q}$  тетракваркова. Такође у радовима (Terasaki 2004b, Terasaki & McKellar 2005, Hayashigaki & Terasaki 2004) је показано да је мерено стање  $D_s^+(2317)$  егзотично стање са тетракваркном структуром. Лиу и сарадници (Liu *et al.* 2004) доказују да  $D_s^+(2632)$  стање може да буде члан мултиплета скаларних тетракваркова. Они ово стање сврставају у групу  $qq\bar{q}\bar{c}$  тетракваркова. Могућа тетракваркна природа три поменута мезона разматрана је, на пример, у референцама Nicolescu & de Melo 2004, Врасцо *et al.* 2005, Nielsen *et al.* 2006, Dmitrašinović 2006a,b. О актуелности теме о тетракварковима говори и рад Алија и сарадника (Ali *et al.* 2010). Они су показали да експериментално нађено стање  $Y_b(10890)$  има тетракваркну природу, тј. да је то везано (дикварк-антидикварк) стање  $bq\bar{b}\bar{q}$ , међутим ово стање није предмет ове докторске дисертације али је још једна потврда која иде у прилог постојања тетракваркова.

Тетракваркови са шармом  $C = 1$  могу се сврстати у ароматске  $SU(3)$  репрезентације:  $\bar{15}_s$ ,  $\bar{3}_s$ ,  $6_A$  и  $\bar{3}_A$ . Од укупно 27 тетракваркова, 11 је криптоегзотичних (3

$D_s^+$ ,  $4 D^+$ ,  $4 D^0$ ) и 16 експлицитно егзотичних. Рачунамо масе тетракваркова под утицајем Ферми-Брајтове јаке ХФИ у шематској апроксимацији (шематска значи да се занемарују сви други потенцијали у систему тетракваркова и остаје само Ферми-Брајтова ХФИ). Укључујемо ефекте мешања стања у свим приказаним спектрима. У овом моделу, масе 27 тетракваркова су функције 4 слободна параметра:  $m_{u,d}$ ,  $m_s$ ,  $m_c$ ,  $C$ . Вредности ових параметара које даље користимо у рачунању маса тетракваркова су добијене помоћу  $\chi^2$  фита маса мезона и бариона. Код спектра добијених из различитих фитова видимо да имају исти распоред честица и да се променом слободних параметара цео спектар помера ка вишим или ка нижим вредностима масе, или може да буде "сужавање" или "ширење" спектра као целине. Могуће је идентификовати  $D_s^+(2317)$  са најнижим стањем у спектру тетракваркова које је у мултиплету  $\bar{3}_A$  и  $D_s^+(2632)$  са стањем из мешања  $\bar{15}_s$  и  $\bar{3}$ . Израчуната разлика маса страног  $D_s^+(2317)$  и нестраног  $D^0(2308)$  тетракварка је десетак пута већа од експериментално добијене вредности – исто као да се ова стања састоје од једног  $c$  кварка и једног антикварка. Постоје два изотриплета  $\Sigma_s$  ( $\Sigma_s^{++}$ ,  $\Sigma_s^+$ ,  $\Sigma_s^0$ ): један у мултиплету  $\bar{15}_s$  и други у мултиплету  $6_A$ . Показали смо да изотриплет из  $\bar{15}_s$  има исту масу као стање које вероватно представља стање  $D_s^+(2632)$ , док изотриплет из  $6_A$  има исту масу као стање које вероватно представља стање  $D_s^+(2317)$ .

У поглављу 2 дата је дефиниција елементарних честица, као и њихова подела. Објашњен је појам изоспина, како се граде хадрони од конститутивних кваркова и дат је преглед неких квантних бројева кваркова. У поглављу 3 приказани су Јангови и тежински дијаграми за комбинацију једног лаког кварка и два лака антикварка  $q\bar{q}\bar{q}$  и израчунати су квантни бројеви за свих 27 комбинација система  $cq\bar{q}\bar{q}$ . Такође је објашњено мешање стања са истим квантним бројевима. Облик симетричне и антисиметричне спинске таласне функције за тетракваркове  $cq\bar{q}\bar{q}$  дат је у поглављу 4. Ту су приказане и све ароматске таласне функције система тетракваркова са једним  $c$ -кварком и три лака аромата. У поглављима 5 и 6 дефинишемо модел, апроксимацију коју користимо и методе рачунања. У поглављу 7 израчунавамо масе конститутивних кваркова на основу фитова маса лаких и тешких мезона и бариона. У поглављу 8 дат је масени спектар  $cq\bar{q}\bar{q}$  тетракваркова са ФБ и ГР интеракцијом. У поглављу 9 дате су таласне функције и масени спектар скаларног нонета лаких тетракваркова  $qq\bar{q}\bar{q}$ . У поглављу 10 дато је поређење теоријских предвиђања и резултата експеримента. Алтернативна тумачења скаларних стања која садрже  $c$ -кварк приказана су у поглављу 11. Поглавље 12 садржи закључке ове докторске дисертације. На крају дисертације је дат списак коришћене литературе.



## 2. ЕЛЕМЕНТАРНЕ ЧЕСТИЦЕ

Елементарне честице су честице којима се на одређеном нивоу развоја физике не може приписати унутрашња структура, односно које при узајамном деловању са другим честицама или пољима остају недељиве, јединствене целине (задржавају свој идентитет). Основне елементарне честице су лептони и кваркови (видети табелу 2(а)).

Сви процеси у којима учествују елементарне честице као и њихове узајамне трансформације условљени су одређеним интеракцијама. Позната су четири основна типа интеракција (узајамног деловања): електромагнетна интеракција, слаба, јака (нуклеарна) и гравитациона. Елементарне честице интерагују тако што међусобно размењују кванте поља интеракције (видети табелу 2(б)). Електромагнетна интеракција делује на честице са електромагнетним наелектрисањем (фотон је преносилац интеракције), слаба интеракција делује на кваркове и лептоне ( $Z_0$ ,  $W^+$ ,  $W^-$  бозони су преносиоци интеракције), јака делује на честице са бојом (глуон је преносилац интеракције) и гравитациона на честице са масом (гравитон је преносилац интеракције). Дакле, све честице учествују у slabим интеракцијама.

Лептони:  $(e^-, \nu_e)(\mu^-, \nu_\mu)(\tau^-, \nu_\tau)$ ; Антилептони:  $(e^+, \bar{\nu}_e)(\mu^+, \bar{\nu}_\mu)(\tau^+, \bar{\nu}_\tau)$

Кваркови:  $(u, d)(c, s)(t, b)$ ; Антикваркови:  $(\bar{u}, \bar{d})(\bar{c}, \bar{s})(\bar{t}, \bar{b})$

**Табела 2(а).** Истински елементарне честице (Крѓић 1998).

наелектрисање у ( $e$ )	I	II	III	тип честице
0	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	горњи лептони
-1	$e$	$\mu$	$\tau$	доњи лептони
2/3	$u$	$c$	$t$	горњи кваркови
-1/3	$d$	$s$	$b$	доњи кваркови

**Табела 2(б).** Калибрациони бозони (Крѓић 1998).

тип интеракције	преносилац интеракције	маса (GeV)
електромагнетна	фотон ( $\gamma$ )	0
слаба	$Z_0$ , $W^+$ , $W^-$	92, 82, 82
јака	глуони ( $g$ )	0
гравитациона	гравитон	?

Кваркова и лептона има тачно по шест и подељени су у три генерације. Фундаменталних честица има укупно 24 (12 лептона и 12 кваркова) јер се ту убрајају и античестице. Античестице имају исту масу и исти спин као и честице, а разликују се по знаковима квантних бројева.

Изузев неколико потпуно неутралних честица, какав је на пример фотон или  $\pi^0$ -мезон, све честице имају античестице. Потпуно неутралне честице су оне које су идентичне са својим античестицама и њихово основно својство је то што оне не могу да се анихилирају.

Модерна теорија елементарних честица формулисана је почетком 70-тих година XX века и назива се Стандардни модел. То није само модел, већ математичка теорија која описује експерименте и интеракције честица. Више од 30 теоријских и експерименталних физичара награђено је Нобеловом наградом за своја истраживања која су директно везана за Стандардни модел у задњих педесетак година (погледати табелу 2(в)).

**Табела 2(в).** Нобелове награде за физику добијене за истраживања која су директно везана за Стандардни модел (Antunović 2009).

год.	добитници	постигнуће
1957	T. D. Lee, C. N. Yang	нарушење парности
1960	D. A. Glaser	маглена комора
1965	R. P. Feynman, J. S. Schwinger, S. I. Tomonaga	квантна електродинамика
1968	L. W. Alvarez	откриће резонанци
1969	M. Gell-Mann	кварк модел
1976	B. Richter i S. C. C. Ting	откриће J/Ψ честице
1979	S. L. Glashow, A. Salam, S. Weinberg	Електро-слабо уједињење
1980	J. W. Cronin, V. L. Fitch	CP нарушење
1982	K. G. Wilson	критични феномени
1984	C. Rubbia, S. Van Der Meer	откриће $W^\pm$ и Z бозона
1988	L. M. Lederman, M. Schwartz, J. Steinberger	откриће да је $\nu_\mu \neq \nu_e$
1990	J. I. Friedman, H. W. Kendall, R. E. Taylor	дубоко нееластично расејање
1992	G. Charpak	честични детектори (wire chamber)
1995	M. L. Perl, F. Reines	откриће неутрина
1999	G. 't Hooft, M. J. G. Veltman	електро-слабе интеракције
2004	D. J. Gross, H. D. Politzer, F. Wilczek	асимптотска слобода
2008	Y. Nambu, M. Kobayashi, T. Maskawa	нарушење симетрије

Дакле, елементарне честице можемо да поделимо на фундаменталне честице и хадроне. Фундаменталне честице су лептони и кваркови, као и бозони-преносиоци. Хадрони се деле на мезоне и барионе.

## 2.1. Лептони и кваркови

За лептоне је карактеристично да не учествују у јаким нуклеарним интеракцијама. Да би се издвојили од осталих елементарних честица и да би се разликовали лептони и антилептони, уведена је физичка величина – лептонски набој. Лептонском набоју одговара лептонски квантни број  $L$ : сви лептони имају  $L = +1$ , антилептони имају  $L = -1$  док остале честице немају лептонски број ( $L = 0$ ). Лептонски број се одржава у свим трансформацијама елементарних честица: то омогућује проверу и предвиђање исхода разних реакција у којима учествују лептони, односно које су њихове реакције могуће, а које су забрањене.

Кваркови не постоје у слободном стању, већ се налазе у саставу (унутар) других честица – хадрона. Хадрони су безбојне комбинације обојених кваркова. Претпоставља се да се кваркови јављају у три боје (колор набоји): црвена ( $r$ -red), зелена ( $g$ -green) и плава ( $b$ -blue), али тако да било које стање хадрона (бариона и мезона) мора да буде безбојно. Појам "боја" у теорији кваркова се употребљава као синоним речи "тип" или "врста". Теорија кварковске интеракције је конструисана по аналогiji са квантном електродинамиком и зове се квантна хромодинамика (аналогija је у смислу везаних стања: атом у квантној електродинамици и хадрон у квантној хромодинамици). И кваркови и лептони имају спин  $1/2$  (у јединицама редуковане Планкове константе  $\hbar$ ), тј. припадају фермионима.

Познати део свемира чине  $u$ -кваркови,  $d$ -кваркови, електрони, електронска неутрина и калибрациони бозони (бозони измене). Остали кваркови и лептони добијају се у акцелераторима (и повремено у сударима високо енергетских космичких зрака у Земљиној атмосфери); због кратког живота су постојали само у раном стадијуму Универзума (видети на пример књиге Halzen & Martin 1984, Kane 1987, Povh *et al.* 1995). И тако долазимо до једноставне шеме за изградњу космоса. Између малог броја тачкастих јакоинтерагујућих кваркова и слабоинтерагујућих лептона делују просте силе које преносе калибрациони бозони (Крпић 1998).

## 2.2. Хадрони

Хадрони су елементарне честице које карактерише јака нуклеарна интеракција, али су подложни и другим видовима узајамног деловања (електромагнетна, слаба и гравитациона интеракција). Хадрони, за разлику од лептона, елементарни су само у том смислу што се они у било којој интеракцији не могу разбити на саставне делове (кваркове). Иначе, хадрони (мезони и бариони) имају унутрашњу структуру. Према кварковској концепцији сваки мезон је састављен од једног кварка и једног антикварка, а сваки барион од три кварка.

Протон као најлакши барион садржи два  $u$ -кварка и један  $d$ -кварк  $|p\rangle = |uud\rangle$ . Неутрон се састоји од два  $d$ -кварка и једног  $u$ -кварка  $|n\rangle = |ddu\rangle$ . Неутрон има већу масу од протона јер је  $d$ -кварк веће масе од масе  $u$ -кварка. То је због тога што нуклеони (као и остале честице) не садрже огољене (издвојене) кваркове, већ конститутивне (везане)

кваркове међу којима постоји посебна врста интеракције која условљава и одговарајући дефект масе. Бариони који садрже осим  $u$  и  $d$  и друге врсте кваркова зову се хиперони.

Да би се бариони разликовали од антибариона и да би се правила разлика између бариона и мезона, као и између бариона и осталих честица, уведена је физичка величина – барионски набој, којој одговара барионски квантни број  $B$ . По дефиницији, код свих бариона  $B = +1$ , код антибариона је  $B = -1$ , а код мезона и осталих честица је  $B = 0$ . Сматра се да се барионски набој одржава у свим интеракцијама. На основу спина и типа статистике, мезони су бозони (целобројан спин), а бариони фермиони (спин је  $n \times 1/2$ , где је  $n$  цео број различит од нуле).

Напоменимо да су лептонски и барионски број одржани у Стандардном моделу, али у многим теоријама изван Стандардног модела нису. Дакле, ти закони одржања нису тако фундаментални као одржање наелектрисања и закони који следе из просторно-временских симетрија.

### 2.3 Изоспин

Познато је да протон и неутрон имају сличне особине: исти барионски број  $1/3$ , спин  $1/2$  и врло блиске вредности маса ( $m_n = 939,57 \text{ MeV}$ ,  $m_p = 938,28 \text{ MeV}$ , дакле мала разлика у маси између протона и неутрона од  $1,3 \text{ MeV}$ ). Једина разлика између ове две честице је у обичном наелектрисању. Ово је први и довољан сигнал да су нуклеарне силе независне од наелектрисања (Крић 1998).

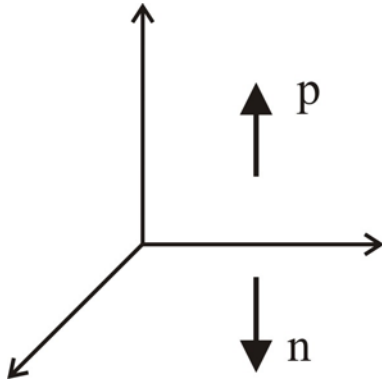
Кад се посматра само јака интеракција, честица нуклеон је дегенерисана. Увођењем и електромагнетне интеракције, нуклеон  $N$  се цепа на два стања: протон  $p$  (наелектрисан) и неутрон  $n$  (ненаелектрисан). У односу на јаку интеракцију,  $p$  и  $n$  су иста честица. Теорија која описује интеракције нуклеона је инваријантна на ротације у јаком изоспинском простору, тј. јаке силе се не мењају услед ротација у том простору. Нарушење ове симетрије настаје због електромагнетне (ЕМ) интеракције и због разлика маса  $u$  и  $d$  кваркова ( $|p\rangle = |uud\rangle$ ,  $|n\rangle = |ddu\rangle$ ).

Независност нуклеарних сила од наелектрисања довела је до увођења новог квантног броја: изоспина  $T$ . За разлику од обичног спина, оператори изоспина делују у апстрактном изоспинском простору. Каже се још у „унутрашњем“ простору, а симетрије као што је изоспинска називају се унутрашњим (о унутрашњим симетријама видети е.г. Dragović & Ignjatović 2010). На слици 2.3. шематски је представљен простор јаког изоспина. То је простор честица у коме је нуклеон дат у неком правцу и смеру. Вертикалан правац са смером на горе значи протон, вертикалан правац са смером на доле означава неутрон, док стрелица у другим правцима нема неко посебно име. У изоспинском простору хадрони формирају мултиплете. Чланови тих мултиплета се међусобно разликују само по ЕМ својствима, која са друге стране одређују степен дегенерације стања хадрона.

$N_T = 2T + 1$  број стања изоспинског мултиплета

$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$  нуклеон може да се прикаже као изоспински дублет групе  $SU(2)$ <sup>1</sup>

И други хадрони могу да се сврставају у  $SU(2)$  мултиплете јаког изоспина (за детаље видети Кане 1987).



$$T(N) = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} T_3(p) = +\frac{1}{2} \\ T_3(n) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$T_3$  – трећа пројекција изоспина

Слика 2.3. Простор јаког изоспина.

У изоспинском простору  $q$  и  $\bar{q}$  су дводимензионални вектори:  $q = (u \ d)$  и  $\bar{q} = (\bar{d} \ -\bar{u})$

$$q \rightarrow e^{i\tau\alpha} q, \quad \bar{q} \rightarrow \bar{q} e^{-i\tau\alpha},$$

где су  $\tau$  – Паулијеве матрице и  $\alpha$  – угао ротације (Le Yaouanc *et al.* 1988).

У том простору, страни кваркови  $s, \bar{s}$  су изосинглети, па ће хадрони који имају исти  $s, \bar{s}$  састав а разликују се за  $u, d$  (или  $\bar{u}, \bar{d}$ ) бити дегенерисани (дегенерисани су због  $s, \bar{s}$ ). Тако, код бариона на пример  $p$  и  $n$  чине изоспински дублет а  $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$  изоспински триплет. Или код мезона на пример  $K^+$  и  $K^0$  чине дублет, а  $\pi^+, \pi^0, \pi^-$  триплет.

Паулијеве матрице представљају матричну репрезентацију оператора изоспина:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>  $SU(2)$  група је специјална ( $\det = 1$ ), унитарна група матрица димензије  $2 \times 2$  (опширније о групи  $SU(2)$  видети Dragović & Ignjatović 2010).

## 2.4. Неки квантни бројеви кваркова

Идеја модела кваркова је да се уведе мали скуп честица, да им се придруже одређена својства, и да се помоћу њих изграде хадрони као што се од неутрона и протона граде различита атомска језгра. Основни хипотетички елементи хадрона називају се кваркови. Они нису никад изоловани или појединачно посматрани. Неки квантни бројеви лаких кваркова:  $u$ ,  $d$ ,  $s$  и тешког кварка  $c$  дати су у табели 2.4(а). Ароматски квантни бројеви за све кваркове дати су у табели 2.4(б).

**Табела 2.4(а).** Неки квантни бројеви лаких кваркова:  $u$ ,  $d$ ,  $s$  и тешког кварка  $c$ .

кварк	$B$	$T$	$T_3$	$\sigma$	$S$	$Y$	$Q$	$C$
$u$	1/3	1/2	1/2	1/2	0	1/3	2/3	0
$d$	1/3	1/2	-1/2	1/2	0	1/3	-1/3	0
$s$	1/3	0	0	1/2	-1	-2/3	-1/3	0
$c$	1/3	0	0	1/2	0	4/3	2/3	1

$B$  - барионски број (1/3 за барион, -1/3 за антибарион)

$T$  - изоспин

$T_3$  - трећа компонента изоспина

$\sigma$  - спин у јединицама  $\hbar$

$S$  - квантни број страност (-1 за  $s$  кварк, 1 за  $\bar{s}$  кварк)

$Y$  - хипернабој

$Q$  - наелектрисање у јединицама  $e$

$C$  - квантни број шарм (1 за  $c$  кварк, -1 за  $\bar{c}$  кварк)

Између  $T_3$  и  $Y$  постоји следећа релација:  $Q = T_3 + 1/2 Y$ , док се  $Y$  добија као следећи збир:  $Y = B + S + C$  (тзв. уопштена релација Гел-Мана и Нишициме).

**Табела 2.4(б).** Квантни бројеви који карактеришу аромат кваркова (Паковас 2001).

кварк	$D$	$U$	$S$	$C$	$B$	$T$
$d$	-1	0	0	0	0	0
$u$	0	1	0	0	0	0
$s$	0	0	-1	0	0	0
$c$	0	0	0	1	0	0
$b$	0	0	0	0	-1	0
$t$	0	0	0	0	0	1

### 3. СИСТЕМ КВАРКОВА

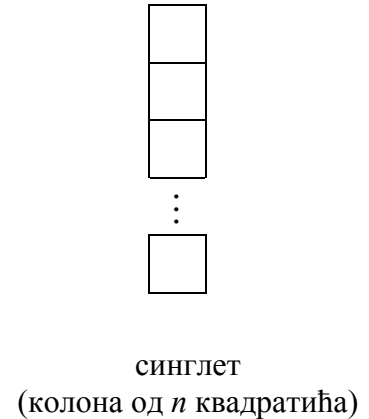
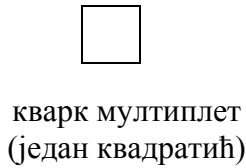
#### 3.1. Јангови дијаграми

Дефиниција 3.1: Поделимо  $k$  идентичних квадратића у  $D$  подскупова са по  $\lambda_m$  елемената ( $m = 1, 2, \dots, D$ ), поређаних тако да је  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_D \geq 1$ . Тада партиција<sup>1</sup>  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D]$  задовољава  $\sum_{m=1}^D \lambda_m = k$ . Дијаграм добијен цртањем  $D$  врста квадратића које су лево поравнате и поређане једна испод друге почевши од  $\lambda_1$  назива се Јангов дијаграм, односно шема или табела (Cvitanović 2008).

Јангови дијаграми омогућавају шематско представљање симетричних и антисиметричних таласних функција (за детаље видети Cvitanović 2008).

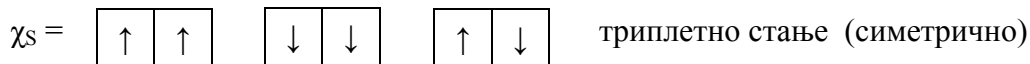
Пример 3.1(а): шематски приказ кварк мултиплета, антикварк мултиплета и синглетног стања (SU( $n$ ) група)

Дијаграм у некој групи реда  $n$  има највише  $n$  врста.



Пример 3.1(б): шематски приказ две честице са спиновима  $\uparrow$  и  $\downarrow$  (SU(2) група)

Симетрично стање се представља помоћу врсте, а антисиметрично помоћу колоне.



<sup>1</sup> У теорији бројева партиција неког природног броја је начин његовог записивања у облику суме природних бројева, при чему ако се неке две суме разликују само у редоследу сабирака оне се сматрају за исту партицију. Партиције се обично записују у угластим заградама. На пример, све партиције броја четири су: [4], [3,1], [2,2], [2,1,1], [1,1,1,1].

$$\chi_\lambda = \begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \downarrow \\ \hline \end{array} \quad \text{синглетно стање (антисиметрично)}$$

Пример 3.1(в): купловање више мултиплета

Квадратић може да се додаје тако да број поља у врсти (колони) расте на десно (доле). За купловање више од два мултиплета, прво се куплују прва два а затим трећи са сваким мултиплетом добијеним од прва два, итд.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline a \\ \hline \end{array}$$

Метода за израчунавање димензија Јангових дијаграма у некој групи  $SU(n)$  (Cvitanović 2008):

- 1° у горњи леви квадратић упише се димензија дате групе  $n$
- 2° остали квадратићи се попуњавају тако да бројеви по врстама расту за 1 на десно, а по колонама опадају за 1 на доле
- 3° израчуна се производ  $A$  бројева у свим квадратићима
- 4° за сваки квадратић нађе се укупан број квадратића десно од њега у истој врсти и испод њега у истој колони, и тај број се увећа за један (да би се урачунао и посматрани квадратић)
- 5° израчуна се производ  $B$  свих бројева добијених у кораку 4°
- 6° димензија је количник  $A/B$ .

**Одређивање симетричности репрезентација** на основу Јангових дијаграма (Scherer 2005):

- 1° репрезентације чије се Јангове табеле састоје од само једне врсте квадратића, потпуно су симетричне
- 2° репрезентације чије се Јангове табеле састоје од само једне колоне квадратића, потпуно су антисиметричне
- 3° све остале репрезентације имају мешану симетрију.



Основна идеја Јангових шема је да се свака иредуцибилна репрезентација групе  $SU(n)$  опише помоћу уређених квадратића, тако да следећа правила буду задовољена (Scherer 2005):

1° Јангова табела је скуп лево поравнатих врста квадратића

2° број квадратића у врстама је нерастући (на доле)

3° Јангове табеле које се разликују за лево поравнате колоне од  $n$  квадратића осликавају исту иредуцибилну репрезентацију.

### 3.2. $SU(3)$ група

За физику елементарних честица најважније су  $SU(n)$  – специјалне унитарне групе у  $n$  димензија. Елементи  $SU(n)$  групе су  $n \otimes n$  унитарне<sup>2</sup> матрице, јединичне детерминанте. Број независних параметара групе  $SU(n)$  је  $n^2$ , а услов јединичне детерминанте смањује број независних параметара за 1, па је ранг  $SU(n)$  групе  $n^2 - 1$  (видети нпр. Ignjatović 2008). Ред групе је дат бројем независних оператора који се могу конструисати из генератора, а који комутирају са свим генераторима те групе. Такви оператори се називају Казимирови оператори (видети нпр. Šif 1968).

Скуп унитарних  $3 \times 3$  матрица са детерминантом једнаком 1 чини групу  $SU(3)$ . Генератори те групе су линеарно независне хермитске  $3 \times 3$  матрице чији је траг једнак 0. Има их укупно  $3^2 - 1 = 8$ . Такве су Гел-Манове  $\lambda$ -матрице, за које се може рећи да су уопштење Паулијевих  $\sigma$ -матрица групе  $SU(2)$ . Постоје два Казимирова оператора који комутирају са свим  $\lambda$ , па је  $SU(3)$  реда 2. Фундаментална репрезентација групе  $SU(3)$  је триплет.

Дефиниција 3.2(a): Репрезентација  $\Gamma = \{D(g_i)\}$  групе  $G = \{g_i\}$  која делује над векторским простором  $V$  је редуцибилна уколико постоји нетривијални потпростор  $V_1$  од  $V$  који је инваријантан на  $\Gamma$ , тј.  $D(g)V_1 \subset V_1 \quad \forall g \in G$ .

Дефиниција 3.2(б): Репрезентација  $\Gamma$  над векторским простором  $V$  је иредуцибилна ако  $V$  нема инваријантних потпростора изузев  $\{0\}$  и самог себе.

Идентификација свих могућих иредуцибилних репрезентација дате групе, као и растављање произвољне репрезентације на њихов директни збир  $\Gamma = \sum_i \oplus \Gamma_i$ , главни су задаци за поглавље 3.4. (за детаље видети Jones 1998).

<sup>2</sup> Унитарна матрица је квадратна матрица са комплексним елементима за коју важи  $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ .

## Унутрашње симетрије

Унутрашње симетрије представљају инваријантност у односу на трансформације поља при којим се не мењају просторно-временске координате. Глобална (параметри не зависе од просторно-временских координата) унутрашња симетрија  $U(1)_Q$  представља инваријантност у односу на трансформацију  $\phi \rightarrow \phi' = e^{-iQ\alpha} \phi$ , где је  $Q$  наелектрисање, а  $\alpha$  параметар који не зависи од координата.  $U(1)_Q$  је једина позната унутрашња симетрија која не само да је тачна него чије би нарушење довело до неконзистентности теорија. Све остале глобалне унутрашње симетрије су нарушене, а код локалних (параметри зависе од просторно-временских координата) унутрашњих симетрија постоји бар могућност нарушења (Dragović & Ignjatović 2010).

## SU(3) оператори

Постоји група оператора (укупно осам) који не мењају неку интеракцију када се примене на њу у бази групе SU(3). База групе SU(3) састоји се од 3 независна стања (3 кварка). Сваки оператор који делује у простору који је одређен са 3 основна стања може да се изрази као линеарна комбинација ових 8 оператора, уз додатак јединичног оператора.

SU(3) даје основу за груписање хадрона у супермултиплете, као што се заједнички називају октети, декуплети и синглети.

Хадрони представљају по свом саставу SU( $n$ ) мултиплете, при чему  $n$  иде од 2 до 6. Група SU(2) представља групу изоспинске симетрије – једине ароматске (или флејворске) симетрије прве генерације кваркова ( $u$  и  $d$ ), група SU(3)<sub>F</sub> већу групу симетрија која укључује и страност итд. Како се иде према већим групама ароматска симетрија је све више нарушена; разлике у масама хадрона који припадају истом мултиплету су све веће. Директан производ двеју група SU( $n$ ), нпр. SU( $n_1$ ) и SU( $n_2$ ), увек је садржан у групи SU( $n_1 \cdot n_2$ ) (за детаље видети e.g. Plakovac 2001).

## Примери SU( $n$ ) група

SU(2) –  $\uparrow, \downarrow$  (спин)

SU(3) –  $u, d, s$  (лаки кваркови)  
–  $r, g, b$  (боје кваркова)

SU(4) –  $u, d, s, c$  (4 кварка)

SU(5) –  $u, d, s, c, b$  (5 кваркова)

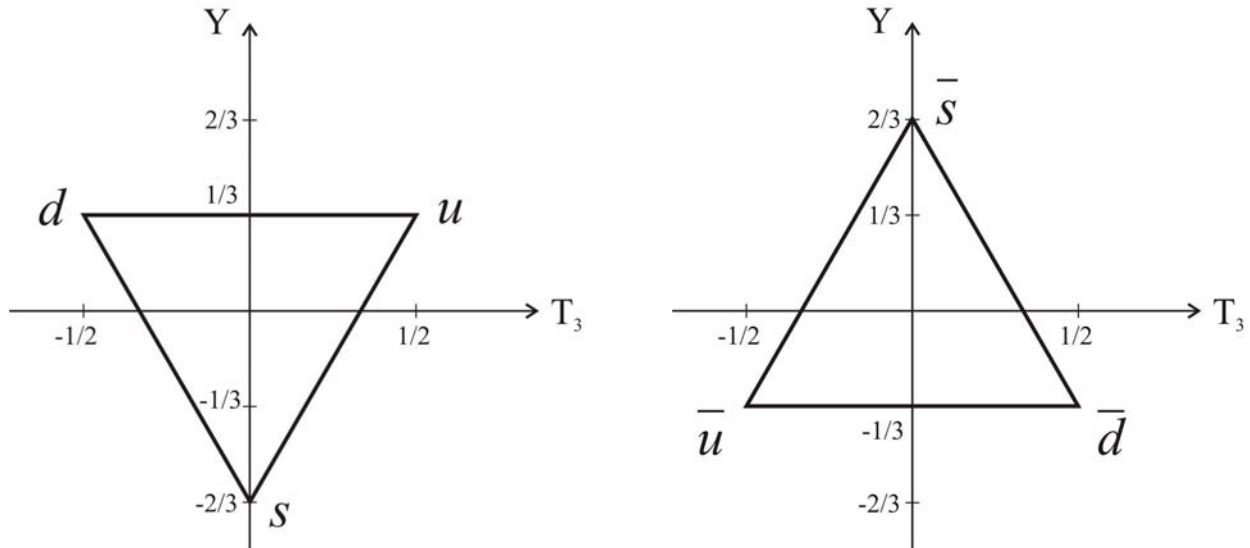
SU(6) –  $u, d, s, c, b, t$  (свих 6 кваркова)  
–  $u\uparrow, u\downarrow, d\uparrow, d\downarrow, s\uparrow, s\downarrow$  (лаки кваркови са спином)

У случају лаквих кваркова имамо три скоро дегенерисана аромата који формирају фундаменталну репрезентацију  $SU(3)_F$  симетрије. Ако укључимо степене слободе спина кварка и орбиталног угаоног момента, симетрија спинско-ароматског простора је  $SU(6) \otimes O(3)$ , при чему  $SU(6)$  садржи  $SU(2) \otimes SU(3)_F$ . Група  $SU(2)$  одговара укупном спину кваркова  $S = 0, 1$ , а  $O(3)$  одговара орбиталном угаоном моменту  $\bar{L}$ . Тада фундаменталну репрезентацију групе  $SU(6)$  чине нерелативистички Паулијеви спинори<sup>3</sup>  $u\uparrow, u\downarrow, d\uparrow, d\downarrow, s\uparrow, s\downarrow$ , где стрелице  $\uparrow$  и  $\downarrow$  представљају спин на горе и на доле дуж исте осе квантизације (Le Yaouanc *et al.* 1988). Ова  $SU(6)$  група се може формално изградити као група која садржи директни производ  $SU(2) \otimes SU(3)_F$ . Међутим,  $SU(3)_F$  је унутрашња, а  $SU(2)$  просторно-временска симетрија те се оне не могу објединити у групу већу од њиховог директног производа (Колман-Мандулина теорема).

### 3.3. Тежински дијаграми

Цртамо својствене вредности  $T_3$  и  $Y$  за кваркове, у некој репрезентацији, као тачке у  $T_3 - Y$  равни. На ординати је хипернабој  $Y$  а на апсциси је трећа компонента изотопског спина. Тежински дијаграми за триплете су дати на слици 3.3. Квантни бројеви  $Y$  и  $T_3$  су адитивне величине, па се тако њихове вредности за неки систем добијају додавањем вредности за  $q$  или  $\bar{q}$ .

Тачке производа две репрезентације добијају се тако што свако теме једног дијаграма постаје центар за други дијаграм.



**Слика 3.3.** Тежински дијаграм у  $SU(3)$  репрезентацији за кваркове (*лево*) и за антикваркове (*десно*).

<sup>3</sup> о спинорима видети Milošević 2003.

### 3.4. Одређивање кваркног састава

#### Скаларни $cq\bar{q}\bar{q}$ тетракваркови

Састоје се од шармантног кварка  $c$  и три лака аромата  $u, d, s$  и укупан спин система је 0. Разматрамо стања са квантним бројевима спин-парност  $J^P = 0^+$  ( $J$  = укупан момент импулса,  $P$  = парност).

Полазимо од следећих дефиниција и на основу тога анализирамо тежинске дијаграме, иредуцибилне репрезентације, спинске и ароматске таласне функције. Наелектрисање честице (дато у јединицама елементарног наелектрисања  $e$ ) може да се изрази преко Гел-Ман-Нишиџимине формуле:

$$Q = T_3 + 1/2 Y, \quad (3.1)$$

где је  $T_3$  – трећа пројекција изоспина и  $Y$  – хипернабој.

За било који кварк или било коју композитну честицу грађену од кваркова и антикваркова важи (не рачунајући трећу генерацију кваркова):

$$Y = B + S + C, \quad (3.2)$$

где су:  $B$  – барионски број (1/3 за кварк, -1/3 за антикварк),  $S$  – квантни број страност (-1 за  $s$  кварк, 1 за  $s$ -антикварк),  $C$  – квантни број шарм (1 за  $c$  кварк, -1 за  $c$ -антикварк). Тако се за тетракваркове са једним  $c$  кварком, једним лаким кварком и два лака антикварка ( $cq\bar{q}\bar{q}$ ) добија:

$$B = 1/3 + 1/3 - 1/3 - 1/3 = 0; \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad Y = S + 1, \quad (3.3)$$

па је:

$$Q = T_3 + 1/2 \cdot (B + S + C) = T_3 + 1/2 \cdot (S + 1). \quad (3.4)$$

На основу тако добијених квантних бројева скуп од 27 скаларних тетракваркова класификован је у групе (видети табеле 3.5(а)-(г) у поглављу 3.5).

#### Јангови дијаграми за $q\bar{q}\bar{q}$

За систем тетракваркова са једним  $c$ -кварком  $cq\bar{q}\bar{q}$ , интеракција између лаким кваркова  $q_i$  и  $c$ -кварка се занемарује у лимесу тешког кварка. Због тога, у првој апроксимацији, може да се каже да три лака кварка нису спрегнута са тешким кварком па могу да се разматрају стања састављена од  $u, d, s$  као трикваркна стања или колор (тј. по боји) несинглетни бариони, у везаном стању (Yasui & Oka 2007).

Стања мултиплета иредуцибилних репрезентација  $SU(n)$  одговарају одређеним комбинацијама Јангових шема. У случају  $q\bar{q}\bar{q}$ , један кварк и два антикварка комбинују се у честице које се групишу у мултиплете по неким заједничким особинама. Постоји 27 комбинација лаких кваркова  $u, d, s$ . За купловање више од два мултиплета, прво куплујемо прва два а затим трећи са сваким мултиплетом добијеним од прва два. Користимо Јангове дијаграме за шематско представљање симетричних и антисиметричних таласних функција:  $3$  значи један кварк у групи  $SU(3)$ ;  $\bar{3}$  значи један антикварк у групи  $SU(3)$ .

$$3 \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \right)$$

Рачун димензија дијаграма урађен је на следећи начин:

$$= \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \right) + \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \right)$$

Јангови дијаграми који се разликују за лево-поравнате колоне од  $N$  поља у  $SU(n)$ , припадају истој иредуцибилној репрезентацији. У случају  $SU(3)$ , то се односи на лево-поравнате колоне од 3 поља, па  $3 \otimes \bar{3} \otimes \bar{3}$  може да се прикаже као:

$$\left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right) + \left( \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right)$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = \left( \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} \right) + \left( \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 1} \right); \quad 3 \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = (\bar{15}_s + \bar{3}_s) + (\bar{3}_A + 6_A)$$

Можемо, провере ради, променити редослед множења и на крају треба да се добију исти мултиплет. Тако се исти производ добија и на следећи начин:

$$q_2 \bar{q}_3 \bar{q}_4: (3 \otimes \bar{3}) \otimes \bar{3} = (1 \otimes 8) \otimes \bar{3} = (\bar{3}_{A,S}) + (\bar{3}_{A,S} + \bar{15}_s + 6_A)$$

У односу на трансформације  $SU(3)_F$ , шармантни кварк је синглет. Тако, за систем  $cq\bar{q}\bar{q}$  постоје четири мултиплета према:  $3 \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} \otimes 1 = (\bar{15}_S + \bar{3}_S) + (\bar{3}_A + 6_A)$ . Дакле, тетракваркови са кваркним саставом  $cq\bar{q}\bar{q}$  формирају четири мултиплета: два анти-триплета, један анти-15-плет и један секстет (слика 3.4(a)).

$$\begin{aligned}
 3 \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} &= \square \otimes \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) = \square \otimes \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) = \square \otimes \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \square \right) \\
 &= \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) = \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) + \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Слика 3.4(a). Јангови дијаграми за  $SU(3)_F$  мултиплете.

Бројеви 15, 3, 3 и 6 су добијени као димензије приказаних Јангових дијаграма. Означавају број честица у једној групи (мултиплету). Честице у оквиру једног мултиплета имају исти барионски број, спин и унутрашњу парност. Хадрон има унутрашњу парност (парну (+) или непарну (-)) у зависности од тога да ли таласна функција честице за  $L = 0$  мења знак када се примени оператор парности (то је (-) парност) или не мења знак (то је (+) парност). Парност значи инваријантност на просторну инверзију. Честице са истог дијаграма имају приближно исту масу. Ако честица припада неком мултиплету, сви њени изоспински партнери (исти изоспин  $T$ , а различите одговарајуће треће пројекције изоспина  $T_3$ ) припадају истом том мултиплету. Нека је  $\Psi = \phi \zeta \chi v$  тотална функција стања честице. Функције стања обележимо на следећи начин:  $\phi$  – координатна функција стања,  $\zeta$  – функција стања боје,  $\chi$  – спинска функција стања,  $v$  – ароматска (флејворска) функција стања. Индекси S (A) означавају симетричност (антисиметричност) таласне функције.

$\Psi = \phi \zeta \chi v$  тотална функција стања честице  
 $\phi$  – координатна функција стања  
 $\zeta$  – функција стања боје  
 $\chi$  – спинска функција стања  
 $v$  – ароматска (флејворска) функција стања

Тетракваркови (укупно 4 кварка) су бозони, тј. имају целобројан спин (скаларни имају  $S = 0$ ). У  $SU(3)$  групи симетричност укупне таласне функције одређујемо као да су фермиони јер  $SU(3)$  групу чине 3 кварка:  $u, d, s$ . Пошто за Диракове честице (фермиони – спин 1/2) тотална таласна функција треба да буде антисиметрична, а таласна функција боје је антисиметрична и координатна функција стања је симетрична, онда закључујемо да производ  $(\chi \cdot v)$  укупно мора бити симетричан, тј. обе функције у производу морају бити или симетричне или антисиметричне:  $\Psi_A = \phi_S \zeta_A \chi_S v_S$  или  $\Psi_A = \phi_S \zeta_A \chi_A v_A$ .

Мултиплети  $\bar{15}_S$  и  $\bar{3}_S$  су симетрични, тј. симетрични су само у односу на антикваркове  $\bar{q}_3\bar{q}_4$ , али пошто не може да постоји измена између кварка и антикварка, онда се не каже да су они мешано симетрични већ су само симетрични. Мултиплети  $6_A$  и  $\bar{3}_A$  су антисиметрични у односу на антикваркове  $\bar{q}_3\bar{q}_4$ .

Честице из мултиплета  $\bar{15}_S$  и  $\bar{3}_S$  имају симетричну спинску и ароматску таласну функцију ( $\chi_S \cdot v_S$ ).

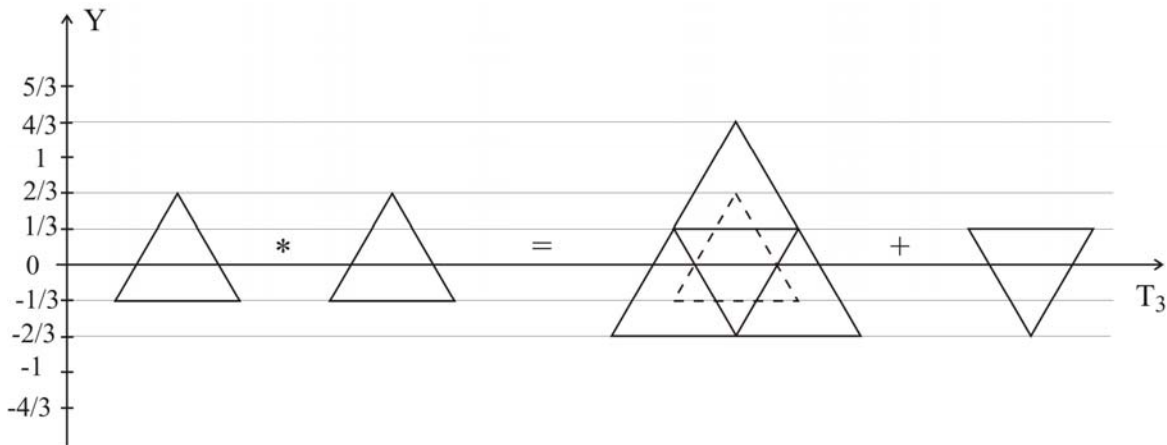
Честице из мултиплета  $6_A$  и  $\bar{3}_A$  имају антисиметричну спинску и ароматску таласну функцију ( $\chi_A \cdot v_A$ ).

Коначно, за симетричне мултиплете важи:  $\Psi_A = \varphi_S \zeta_A \chi_S v_S$ , док је за антисиметричне мултиплете:  $\Psi_A = \varphi_S \zeta_A \chi_A v_A$ .

### Тежински дијаграми за $q\bar{q}\bar{q}$

Индекси S и A код мултиплета означавају да су ароматска стања симетрична или антисиметрична у односу на измену прва два кварка, или у односу на измену задња два антикварка.

Прво комбинујемо два антикварка  $\bar{3} \otimes \bar{3} = \bar{6} + \bar{3}$  (слика 3.4(б)). Затим додајемо трећи кварк  $3 \otimes (\bar{6} + \bar{3}) = 3 \otimes \bar{6} + 3 \otimes \bar{3}$  (слике 3.4(в) и 3.4(г)).

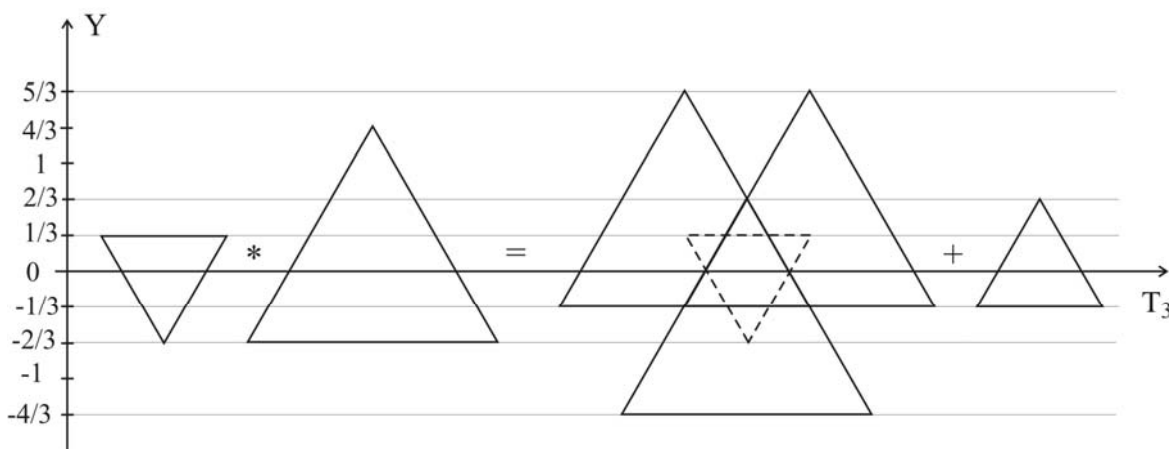


Слика 3.4(б) Тежински дијаграм за комбинацију два антикварка:  $\bar{3} \otimes \bar{3} = \bar{6} + \bar{3}$ .

**Кваркни састав се добија на следећи начин:**

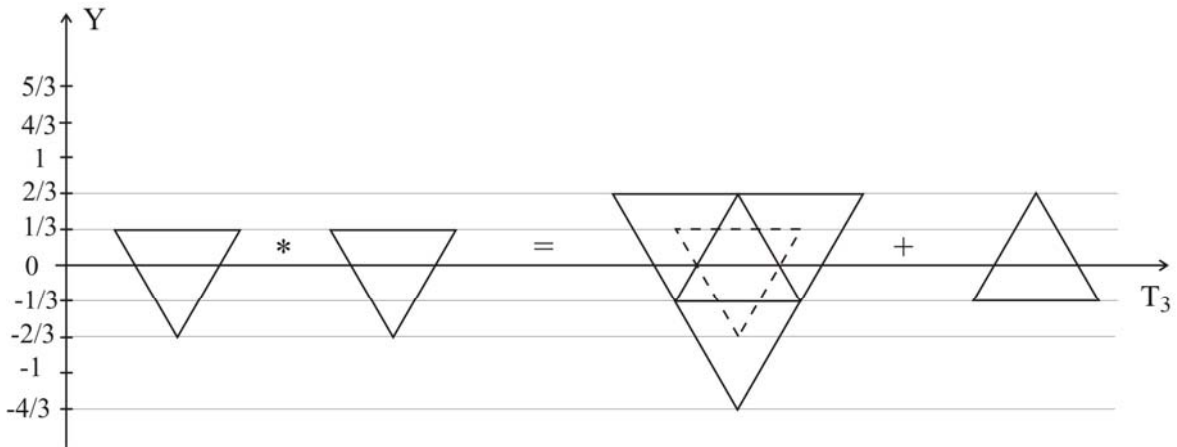
- 1° спајају се  $q_i$  са једног темена неког троугла и његовог центра (тј. на свако теме троугла из производа дода се његов центар)
- 2° на месту где се додирују два троугла, биће два сабирка
- 3° сабирци се споје са (+) ако су стања симетрична или са (-) ако су стања антисиметрична
- 4° све ароматске таласне функције истог мултиплета су међусобно ортогоналне
- 5° два мултиплета су ортогонална

Пошто добијени секстет са слике 3.4(б) у теменима има симетрична стања, онда је он потпуно симетричан и у осталим тачкама. Тако се у овом случају за прву компоненту производа, троугао  $\bar{6}$ , добијају следећи кваркни састави: у теменима великог троугла:  $\bar{s}\bar{s}$ ,  $\bar{u}\bar{u}$ ,  $\bar{d}\bar{d}$ , и на срединама његових страница  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{s} + \bar{s}\bar{u})$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d})$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})$ . За другу компоненту производа, троугао  $\bar{3}$ , добија се:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{s}\bar{u} - \bar{u}\bar{s})$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d})$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u})$ . Ову другу компоненту обележавамо са  $\bar{3}$  да би назначили да то није обична тројка јер је настала множењем и у теменима су по два кварка, а не по један. Видимо да је код кваркних састава са два сабирка додат нормализациони фактор  $1/\sqrt{2}$ . На примеру  $(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u})/\sqrt{2}$  то значи: дати систем од два кварка у доњем темену троугла  $\bar{3}$  има вероватноћу  $1^2/(\sqrt{2})^2$  да буде  $\bar{u}\bar{d}$  и исту толику вероватноћу  $(-1)^2/(\sqrt{2})^2$  да буде  $\bar{d}\bar{u}$ .



**Слика 3.4(в)** Тежински дијаграм за додавање трећег кварка првој компоненти производа на слици 3.3(а):  $3 \otimes \bar{6} = \bar{15}_S + \bar{3}_S$ .



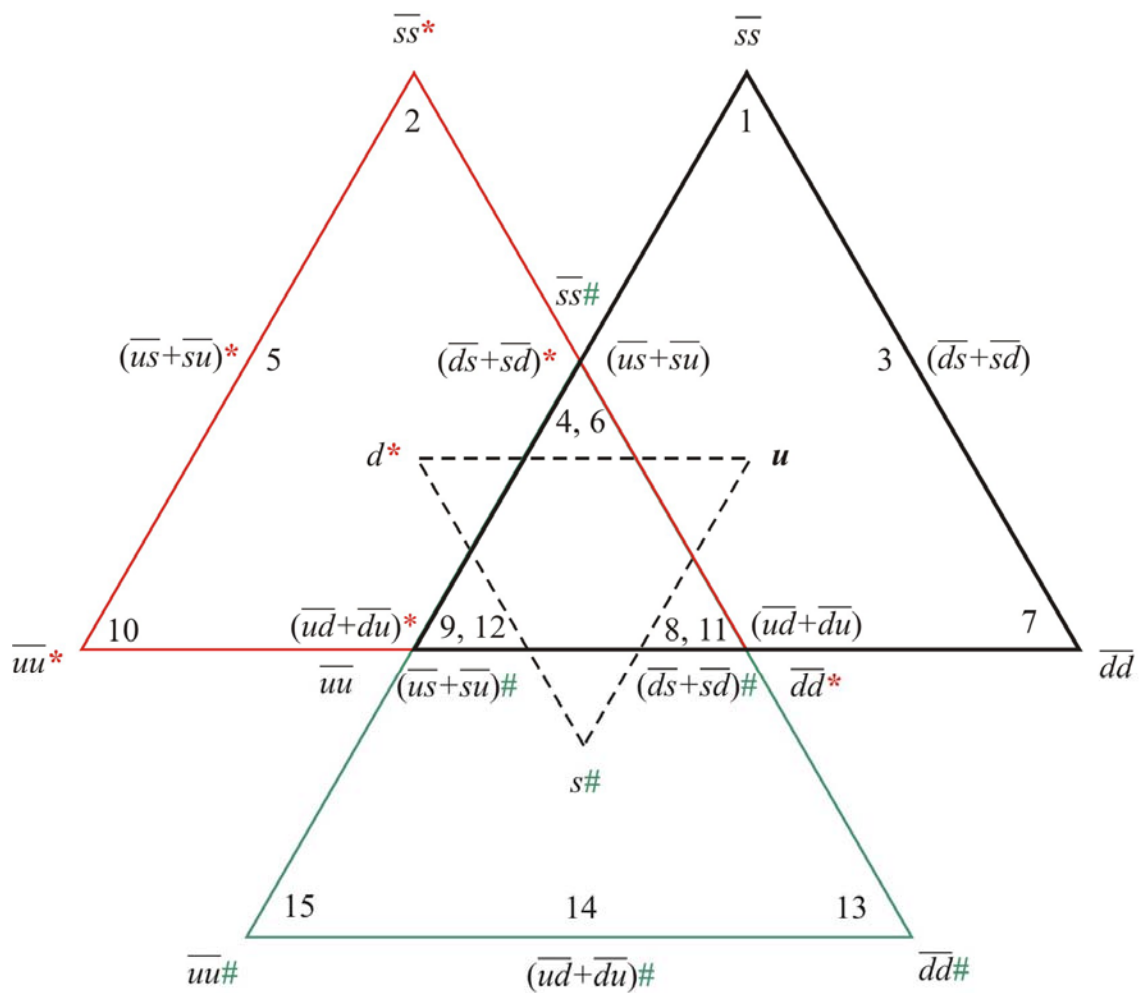


**Слика 3.4(г)** Тежински дијаграм за додавање трећег кварка другој компоненти производа на слици 3.3(а):  $3 \otimes \bar{3} = 6_A + \bar{3}_A$ .

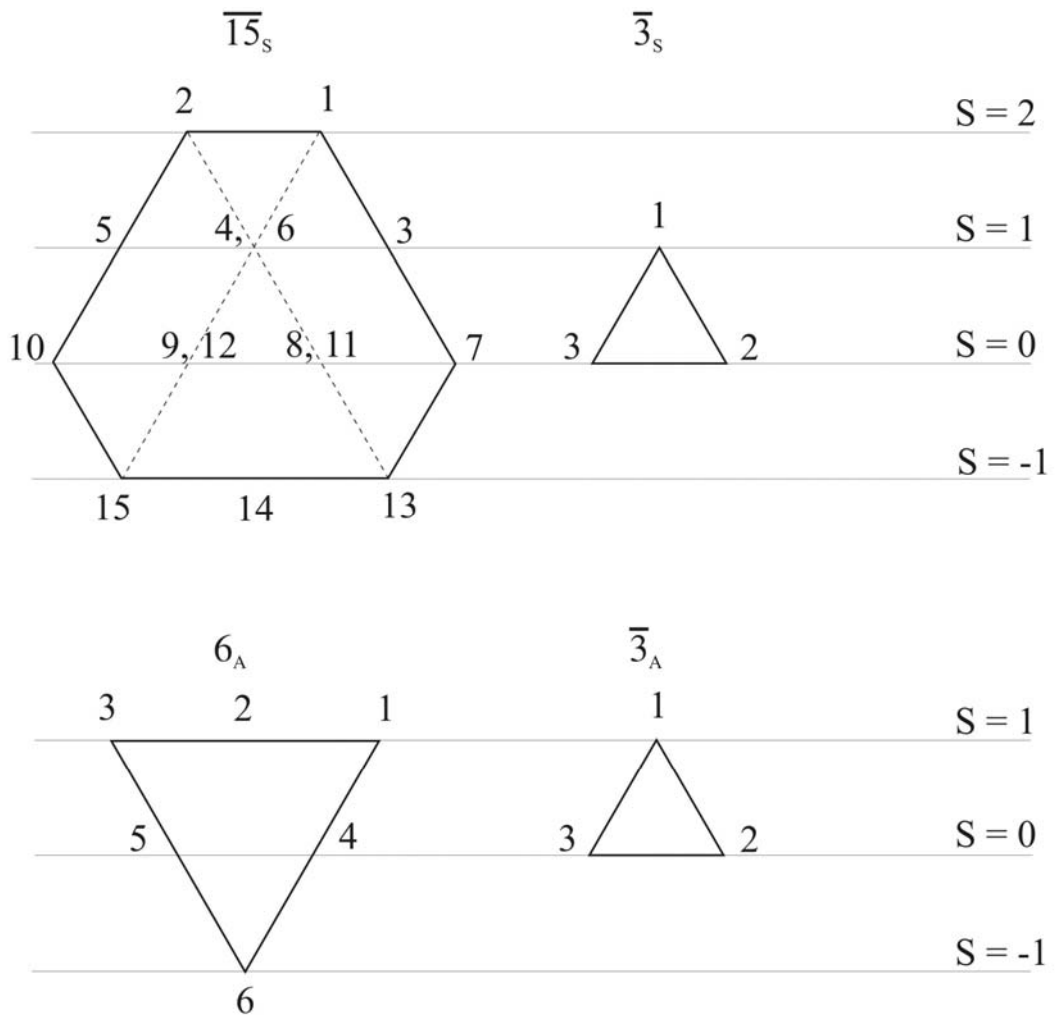
Слика 3.4(в) се односи на добијање  $\bar{15}_S$  и  $\bar{3}_S$ . Слика 3.4(г) се односи на добијање  $6_A$  и  $\bar{3}_A$ .

Тежински дијаграми служе за одређивање кваркова који ће се наћи у теменима добијене слике. Али за коначан облик ароматске таласне функције, тј. за добијање тачних коефицијената испред сваког сабирка, користимо табелу Клебш-Горданових коефицијената. Такође треба водити рачуна о томе да је свако стање ортогонално на сва остала стања. О томе ће више речи бити у одељку 4.1.

Сада ћемо на примеру мултиплета  $\bar{15}_S$  показати добијање кваркова у одговарајућим теменима. Означимо темена троуглова редним бројевима 1-15 као на слици 3.4(д). Да би било јасније који пар  $q\bar{q}$  припада ком троуглу, додата је ознака \* за троугао који је на слици приказан лево и ознака # за доњи троугао. У тачкама означеним са 1, 2, 3, 5, 7, 10, 13 и 15 кваркни састав добијамо тако што антикваркове из тих тачака спајамо са кварковима из центара одговарајућих троуглова. Док у тачкама 4, 6, 8, 9, 11 и 12 имамо пресек по три троугла, па морамо за сваки од та три троугла да спајамо антикваркове са кварковима из њихових центара, тј. очекујемо по три сабирка. Тако, на пример, у тачки 1 кваркни састав биће:  $u\bar{s}$ , у тачки 3 биће  $(\bar{d}s + \bar{s}d)u$ , док у тачкама 4 и 6 имамо више сабирака:  $(\bar{u}s + \bar{s}u)u + (\bar{d}s + \bar{s}d)d + \bar{s}s$ . Истакнимо још једном да за добијање тачних коефицијената испред сваког сабирка, користимо табелу Клебш-Горданових коефицијената и међусобну ортогоналност стања (видети одељак 4.3). На овако добијени кваркни састав  $q\bar{q}q$  додајемо  $s$ -кварк да би добили тетракваркна стања  $sq\bar{q}q$ . Можемо 27 тетракваркних стања да сврстамо по симетричним и антисиметричним мултиплетима као на слици 3.4(ђ).



Слика 3.4(д). Поступак за добијање кваркног састава стања помоћу тежинских дијаграма на примеру мултиплета  $\overline{15}_s$ .



**Слика 3.4(ђ).** Симетрични и антисиметрични мултиплети тетракваркова, са редним бројем за сваки тетракварк, што одговара табели 3.1 и са датом странашћу S.

### 3.5. Квантни бројеви

У табелама 3.5(а) - 3.5(г) приказани су симетрични и антисиметрични мултиплети и дате су ознаке, кваркни састав, наелектрисање, пројекција изоспина, изоспин и страност сваког члана. У овим табелама  $q$  се односи на кваркове  $u$  и  $d$ , док се  $\bar{q}$  односи на антикваркове  $\bar{u}$  и  $\bar{d}$ .

**Табела 3.5(а).** Квантни бројеви тетракваркних стања из мултиплета  $\bar{15}_s$ .

	ознака	кваркни састав	наелектрисање $Q (e)$	пројекција изоспина $T_3$	изоспин $T$	страност $S$
1	$\Xi^{++}$	$c\bar{u}\bar{s}\bar{s}$	2	1/2	1/2	2
2	$\Xi^+$	$c\bar{d}\bar{s}\bar{s}$	1	-1/2		
3	$\Sigma_s^{++}$	$c\bar{u}\bar{d}\bar{s}$	2	1	1	1
4	$\Sigma_s^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{s}$	1	0		
5	$\Sigma_s^0$	$c\bar{d}\bar{u}\bar{s}$	0	-1		
6	$D_s^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{s}$	1	0	0	
7	$\Delta^{++}$	$c\bar{u}\bar{d}\bar{d}$	2	3/2	3/2	0
8	$\Delta^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{d}$	1	1/2		
9	$\Delta^0$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{u}$	0	-1/2		
10	$\Delta^-$	$c\bar{d}\bar{u}\bar{u}$	-1	-3/2		
11	$D^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{d}$	1	1/2	1/2	
12	$D^0$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{u}$	0	-1/2		
13	$\Sigma^+$	$c\bar{s}\bar{d}\bar{d}$	1	1	1	-1
14	$\Sigma^0$	$c\bar{s}\bar{u}\bar{d}$	0	0		
15	$\Sigma^-$	$c\bar{s}\bar{u}\bar{u}$	-1	-1		

**Табела 3.5(б).** Квантни бројеви тетракваркних стања из мултиплета  $\bar{3}_s$ .

	ознака	кваркни састав	наелектрисање $Q (e)$	пројекција изоспина $T_3$	изоспин $T$	страност $S$
1	$D_s^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{s}$	1	0	0	1
2	$D^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{d}$	1	1/2	1/2	0
3	$D^0$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{u}$	0	-1/2		

**Табела 3.5(в).** Квантни бројеви тетракваркних стања из мултиплета  $6_A$ .

	ознака	кваркни састав	наелектрисање $Q(e)$	пројекција изоспина $T_3$	изоспин $T$	страност $S$
1	$\Sigma_s^{++}$	$c\bar{u}d\bar{s}$	2	1	1	1
2	$\Sigma_s^+$	$cq\bar{q}\bar{s}$	1	0		
3	$\Sigma_s^0$	$c\bar{d}u\bar{s}$	0	-1		
4	$D^+$	$cq\bar{q}\bar{d}$	1	1/2	1/2	0
5	$D^0$	$cq\bar{q}\bar{u}$	0	-1/2		
6	$\Omega^0$	$c\bar{s}u\bar{d}$	0	0	0	-1

**Табела 3.5(г).** Квантни бројеви тетракваркних стања из мултиплета  $\bar{3}_A$ .

	ознака	кваркни састав	наелектрисање $Q(e)$	пројекција изоспина $T_3$	изоспин $T$	страност $S$
1	$D_s^+$	$cq\bar{q}\bar{s}$	1	0	0	1
2	$D^+$	$cq\bar{q}\bar{d}$	1	1/2	1/2	0
3	$D^0$	$cq\bar{q}\bar{u}$	0	-1/2		

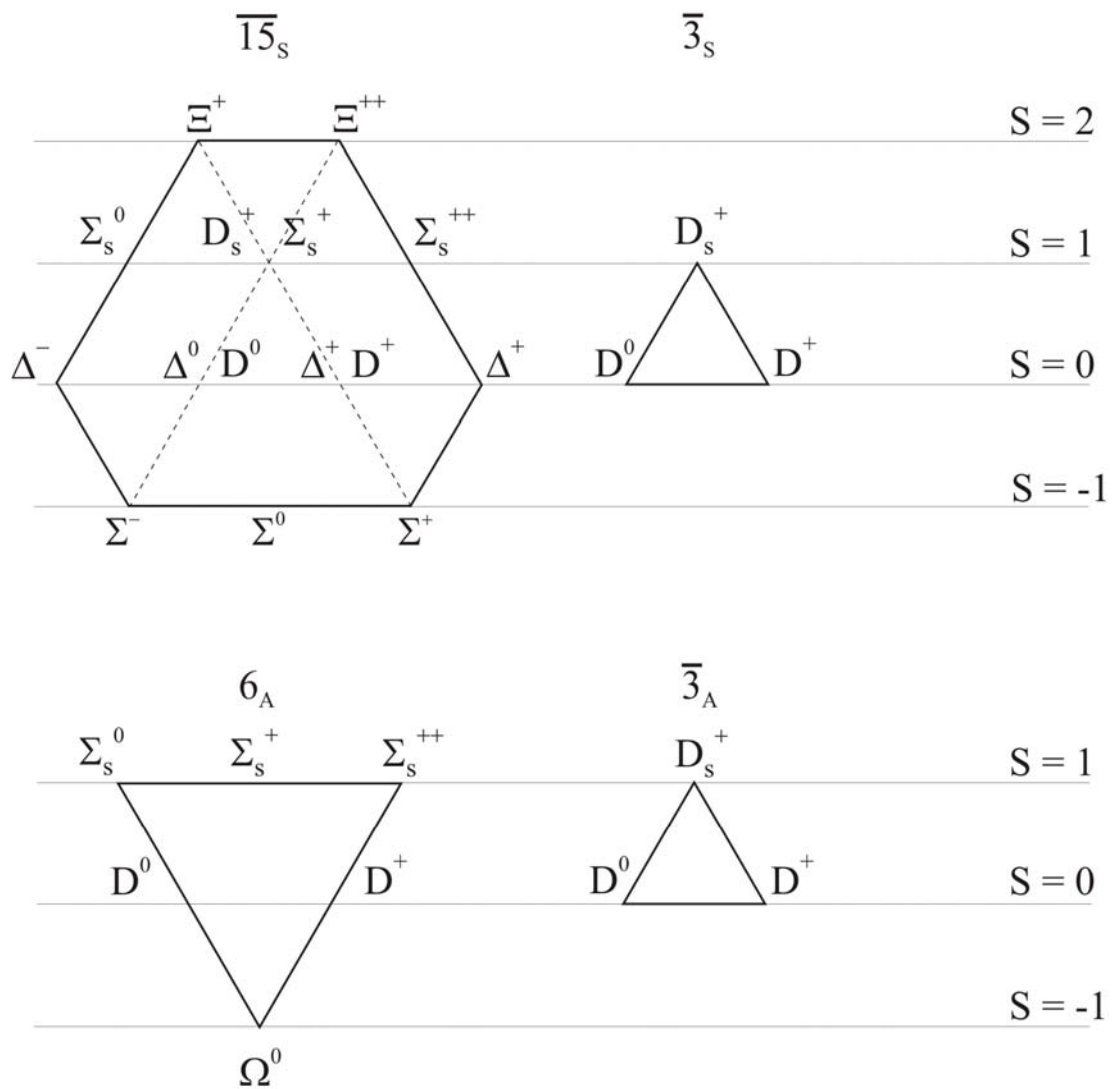
### 3.6. Мешање стања

Постоји мешање између честица симетричних мултиплета  $\bar{15}_S$  и  $\bar{3}_S$ , као и између честица антисиметричних мултиплета  $6_A$  и  $\bar{3}_A$ , док се симетрични и антисиметрични мултиплети међусобно не мешају. Мешање настаје услед истих квантних бројева (наелектрисање  $Q(e)$ , пројекција изоспина  $T_3$ , изоспин  $T$ , страност  $S$ ). Према табелама 3.5(а)-(г), то су следећи тетракваркови:

– у оквиру симетричних мултиплета: 6 из  $\bar{15}_S$  са 1 из  $\bar{3}_S$ ; 11 из  $\bar{15}_S$  са 2 из  $\bar{3}_S$ ; 12 из  $\bar{15}_S$  са 3 из  $\bar{3}_S$  (не зна се које стање припада  $15_S$  а које припада  $3_S$ )

– у оквиру антисиметричних мултиплета: 4 из  $6_A$  са 2 из  $\bar{3}_A$ ; 5 из  $6_A$  са 3 из  $\bar{3}_A$  (не зна се које стање припада  $6_A$  а које припада  $3_A$ )

На слици 3.6 дате су ознаке за свих 27 тетракваркних стања. Ознаке су само узете по аналогији са барионима, али наравно да то нису бариони. Многи аутори користе ове ознаке, погледати нпр. Terasaki & McKellar 2005, Dmitrašinović 2005, Borka Jovanović 2007a.



**Слика 3.6.** Симетрични и антисиметрични мултиплети тетракваркова, са ознаком сваког тетракварка и са датом странашћу  $S$ .

## 4. ТАЛАСНЕ ФУНКЦИЈЕ

### 4.1. Ароматске таласне функције

У овом поглављу ћемо показати конструкцију стања мултиплета иредуцибилних  $SU(3)$  репрезентација грађених од једног кварка и два антикварка. За добијање тачних коефицијената испред сваког сабирка ароматске таласне функције, користимо табелу Клебш-Горданових коефицијената (поглавље 4.3) и међусобну ортогоналност стања. Означимо темена редним бројевима као на слици 3.4(ђ) одељка 3.4.

У одељку 2.3 ове тезе објаснили смо појам изоспина. За ароматску таласну функцију  $v$  и изоспин  $T$ , у случају два кварка (антикварка) са изоспином, важе следеће релације (а), (б) и (в):

$$(а) T = 1, T_3 = 1$$

$$v_{u\bar{d}}(1,1) = u(-\bar{d}) = -u\bar{d}$$

$$v_{uu}(1,1) = uu$$

$$(б) T = 1, T_3 = 0$$

$$v_{ud}(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du)$$

$$v_{u\bar{u}}(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + \bar{u}u)$$

$$v_{d\bar{d}}(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(d(-\bar{d}) + (-\bar{d})d) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} + \bar{d}d)$$

$$v_{\bar{u}\bar{d}}(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}(-\bar{d}) + (-\bar{d})\bar{u}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})$$

$$(в) T = 1, T_3 = -1$$

$$v_{\bar{u}d}(1,-1) = d\bar{u}$$

$$v_{dd}(1,-1) = dd$$

У случају комбинације од укупно три кварка (антикварка) са изоспином, тј. код комбинације три лака кварка  $u$  и  $d$ , укупан спин ће бити  $T = 3/2$ , док пројекције могу да буду  $\pm 3/2$  и  $\pm 1/2$ . Показаћемо како се рачунају неки коефицијенти за таласне функције у случају  $T = 3/2$ , за трећу компоненту  $T_3 = 1/2$  и  $T_3 = -1/2$ .

#### Израчунавање коефицијента испред сабирка $(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})u$

За  $u\bar{u}\bar{d}$  укупан изоспин је  $T = 3/2$  и пројекција изоспина је  $T_3 = 1/2$ .

$$v_{u\bar{u}\bar{d}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{v_{u\bar{d}}(1,1)}_{-u\bar{d}} \cdot v_{\bar{u}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{v_{\bar{u}\bar{d}}(1,0)}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})} \cdot v_u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$v_{u\bar{u}\bar{d}} = \sqrt{\frac{1}{3}}(-u\bar{d})\bar{u} + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})u = -\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{d}\bar{u} + (\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})u)$$

Одавде видимо да  $(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})u$  треба да има коефицијент  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

### Израчунавање коефицијента испред сабирка $(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})d$

За  $d\bar{u}\bar{d}$  укупан изоспин је  $T = 3/2$  и пројекција изоспина је  $T_3 = -1/2$ .

$$v_{d\bar{u}\bar{d}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{v_{\bar{u}\bar{d}}(1,0)}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})} \cdot v_d\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{v_{d\bar{u}}(1,-1)}_{\bar{d}\bar{u}} \cdot v_{\bar{d}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$v_{d\bar{u}\bar{d}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})d + \sqrt{\frac{1}{3}}d\bar{u}\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})d + d\bar{u}\bar{d})$$

Одавде видимо да  $(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})d$  треба да има коефицијент  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

### Израчунавање коефицијента испред сабирка $u\bar{u}\bar{u}$

За  $u\bar{u}\bar{u}$  укупан изоспин је  $T = 3/2$  и пројекција изоспина је  $T_3 = -1/2$ .

$$v_{u\bar{u}\bar{u}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{v_{u\bar{u}}(1,0)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + \bar{u}u)} \cdot v_{\bar{u}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{v_{u\bar{u}}(1,-1)}_{\bar{u}\bar{u}} \cdot v_u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$v_{u\bar{u}\bar{u}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + \bar{u}u)\bar{u} + \sqrt{\frac{1}{3}}u\bar{u}\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}((u\bar{u} + \bar{u}u)\bar{u} + u\bar{u}\bar{u})$$

Одавде видимо да  $u\bar{u}\bar{u}$  треба да има коефицијент  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

### Израчунавање коефицијента испред сабирка $d\bar{d}\bar{d}$

За  $d\bar{d}\bar{d}$  укупан изоспин је  $T = 3/2$  и пројекција изоспина је  $T_3 = 1/2$ .

$$v_{d\bar{d}\bar{d}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{v_{\bar{d}\bar{d}}(1,0)}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} + \bar{d}d)} \cdot v_{\bar{d}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cdot \underbrace{v_{\bar{d}\bar{d}}(1,1)}_{\bar{d}\bar{d}} \cdot v_d\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$v_{d\bar{d}\bar{d}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(d\bar{d} + \bar{d}d)\bar{d} + \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\bar{d}\bar{d}d = \frac{1}{\sqrt{3}}(-(\bar{d}d + d\bar{d})\bar{d} + \bar{d}\bar{d}d)$$

Одавде видимо да  $\bar{d}\bar{d}\bar{d}$  треба да има коефицијент  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .



Пример 4.1(а): стања у тачкама 4 и 6 мултиплета  $\overline{15}_S$ , тј. стања  $c\overline{q}\overline{q}s$

На основу графика 3.4(д) одељка 3.4 можемо да напишемо следеће сабирке за ароматску таласну функцију:  $d(\overline{d}s + \overline{s}d)$ ,  $u(\overline{u}s + \overline{s}u)$ ,  $s\overline{s}s$ .

Видимо из табеле 3.1 одељка 3.5 да стање у тачки 4 има укупан изоспин  $T = 1$ , док стање у тачки 6 има  $T = 0$ . Због тога честица 4 нема сабирак  $s\overline{s}$ , док 6 има. Дакле, за 4 важи да је  $T = 1$ ,  $T_3 = 0$  (случај (б) на почетку овог поглавља), па на основу тога налазимо следеће коефицијенте за сабирке: коефицијент за  $d\overline{d}$  је  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  и коефицијент за  $u\overline{u}$  је  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Дакле,

треба да спојимо сабирке  $\frac{1}{\sqrt{2}}u(\overline{u}s + \overline{s}u)$  и  $\frac{1}{\sqrt{2}}d(\overline{d}s + \overline{s}d)$  тако што додајемо нормализациони коефицијент  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u(\overline{u}s + \overline{s}u) - \frac{1}{\sqrt{2}}d(\overline{d}s + \overline{s}d)\right) = \frac{1}{2}\left(u(\overline{s}u + \overline{u}s) - d(\overline{d}s + \overline{s}d)\right).$$

Честица 6 због ортогоналности треба да има супротан знак испред једне од ових заграда. Осим тога, има и сабирак  $s\overline{s}s$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\left(u(\overline{s}u + \overline{u}s) + d(\overline{d}s + \overline{s}d)\right) + \alpha \cdot s\overline{s}s\right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}\left(u(\overline{s}u + \overline{u}s) + d(\overline{d}s + \overline{s}d) + 2 \cdot \alpha \cdot s\overline{s}s\right)$$

Коефицијент  $\alpha$  налазимо из нормализације:

$$\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 \cdot (1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (2\alpha)^2) = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

У овом случају је  $\alpha = -1$ , док је  $\alpha = 1$  за стање 1 из  $\overline{3}_S$ .

Пример 4.1(б): стања у тачкама 8 и 11 мултиплета  $\overline{15}_S$ , тј. стања  $c\overline{q}\overline{q}\overline{d}$ .

Слично као у првом примеру, на основу графика 3.4(д) можемо да напишемо следеће сабирке за ароматску таласну функцију:  $d\overline{d}\overline{d}$ ,  $u(\overline{u}\overline{d} + \overline{d}\overline{u})$ ,  $s(\overline{d}s + \overline{s}d)$ . Из табеле 3.5(а)

видимо да стање у тачки 8 има укупан изоспин  $T = 3/2$  (укупан изоспин од  $3/2$  могу да дају 3 кварка од којих сваки има изоспин, дакле ту нема  $s$  нити  $\overline{s}$ ), док стање у тачки 11 има  $T = 1/2$ . Због тога честица 8 нема сабирак  $s(\overline{d}s + \overline{s}d)$ , док 11 има. Дакле, за 8 налазимо следеће коефицијенте за сабирке: сабирак  $d\overline{d}\overline{d}$  има коефицијент  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  и сабирак

$u(\overline{u}\overline{d} + \overline{d}\overline{u})$  има коефицијент  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ , тако да је коначан облик ароматске таласне функције:

$\frac{1}{\sqrt{3}}d\bar{d}\bar{d} - \frac{1}{\sqrt{3}}u(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})$ . Овде не треба додавати нормализациони коефицијент јер

можемо да проверимо да је нормираност коефицијената на јединицу испуњена:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

Честица 11 због ортогоналности треба да има супротан знак испред једне од ових заграда.

Осим тога, има и сабирак  $s(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d})$ , тако да се добија:

$$\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(u(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) - 3s(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d}) + 2d\bar{d}\bar{d}\right).$$

Провера коефицијената:  $\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 \cdot (1^2 + 1^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + 2^2) = 1$

У групи  $SU(3)_F$ , у оквиру  $15_S$  честице  $q\bar{q}\bar{q}$  у теменима имају следеће кваркне саставе:

(1)  $u\bar{s}\bar{s}$

(2)  $d\bar{s}\bar{s}$

(3)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}u(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d})$

(4)  $\frac{1}{2}(u(\bar{s}\bar{u} + \bar{u}\bar{s}) - d(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d}))$

(5)  $\frac{1}{\sqrt{2}}d(\bar{s}\bar{u} + \bar{u}\bar{s})$

(6)  $\frac{1}{2\sqrt{2}}(u(\bar{s}\bar{u} + \bar{u}\bar{s}) + d(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d}) - 2s\bar{s}\bar{s})$

(7)  $u\bar{d}\bar{d}$

(8)  $\frac{1}{\sqrt{3}}(-u(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) + d\bar{d}\bar{d})$

(9)  $\frac{1}{\sqrt{3}}(-d(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) + u\bar{u}\bar{u})$

(10)  $d\bar{u}\bar{u}$

(11)  $\frac{1}{2\sqrt{6}}(u(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) - 3s(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d}) + 2d\bar{d}\bar{d})$

(12)  $\frac{1}{2\sqrt{6}}(-d(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) + 3s(\bar{s}\bar{u} + \bar{u}\bar{s}) - 2u\bar{u}\bar{u})$

(13)  $s\bar{d}\bar{d}$

(14)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}s(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})$

(15)  $s\bar{u}\bar{u}$

У оквиру  $\bar{3}_S$  честице у теменима имају следеће кваркне саставе:

$$(1) \frac{1}{2\sqrt{2}}(u(\bar{s}u + \bar{u}s) + d(\bar{d}s + \bar{s}d) + 2s\bar{s}\bar{s})$$

$$(2) \frac{1}{2\sqrt{6}}(u(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) + 3s(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d}) + 2d\bar{d}\bar{d})$$

$$(3) \frac{1}{2\sqrt{6}}(d(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) + 3s(\bar{s}u + \bar{u}s) + 2u\bar{u}\bar{u})$$

У оквиру  $6_A$  честице у теменима имају следеће кваркне саставе:

$$(1) \frac{1}{\sqrt{2}}u(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d})$$

$$(2) \frac{1}{2}(u(\bar{s}u - \bar{u}s) + d(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d}))$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{2}}d(\bar{s}u - \bar{u}s)$$

$$(4) \frac{1}{2}(u(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u}) + s(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d}))$$

$$(5) \frac{1}{2}(d(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u}) + s(\bar{s}u - \bar{u}s))$$

$$(6) \frac{1}{\sqrt{2}}s(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u})$$

У оквиру  $\bar{3}_A$  честице у теменима имају следеће кваркне саставе:

$$(1) \frac{1}{2}(d(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d}) - u(\bar{s}u - \bar{u}s))$$

$$(2) \frac{1}{2}(u(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u}) - s(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d}))$$

$$(3) \frac{1}{2}(s(\bar{s}u - \bar{u}s) - d(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u}))$$

За добијање коначне таласне функције скаларног тетракваркног стања  $cq\bar{q}\bar{q}$ , само додајемо кварк  $c$  испред сваке од ових добијених таласних функција. Коначне ароматске таласне функције ових стања, распоређених по  $SU(3)_F$  мултиплетима, са мешањем између стања са истим квантним бројевима, дајемо у табелама 4.1(а)-4.1(д).

**Табела 4.1(а).** Ароматске таласне функције тетракваркова из мултиплета  $\bar{15}_s$ .

ознака	ароматска таласна функција
$\Xi^{++}$	$c\bar{u}\bar{s}\bar{s}$
$\Xi^+$	$c\bar{d}\bar{s}\bar{s}$
$\Sigma_s^{++}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}cu(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d})$
$\Sigma_s^+$	$\frac{1}{2}c(u(\bar{s}\bar{u} + \bar{u}\bar{s}) - d(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d}))$
$\Sigma_s^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}cd(\bar{s}\bar{u} + \bar{u}\bar{s})$
$\Delta^{++}$	$c\bar{u}\bar{d}\bar{d}$
$\Delta^+$	$\frac{1}{\sqrt{3}}c(-u(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) + d\bar{d}\bar{d})$
$\Delta^0$	$\frac{1}{\sqrt{3}}c(-d(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) + u\bar{u}\bar{u})$
$\Delta^-$	$c\bar{d}\bar{u}\bar{u}$
$\Sigma^+$	$c\bar{s}\bar{d}\bar{d}$
$\Sigma^0$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}cs(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u})$
$\Sigma^-$	$c\bar{s}\bar{u}\bar{u}$

**Табела 6.1(б).** Ароматске таласне функције тетракваркова из мешања мултиплета  $\bar{15}_s$  и  $\bar{3}_s$ .

ознака	ароматска таласна функција
$D_s^+$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}c(u(\bar{s}\bar{u} + \bar{u}\bar{s}) + d(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d}) - 2s\bar{s}\bar{s}); \frac{1}{2\sqrt{2}}c(u(\bar{s}\bar{u} + \bar{u}\bar{s}) + d(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d}) + 2s\bar{s}\bar{s})$
$D^+$	$\frac{1}{2\sqrt{6}}c(u(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) - 3s(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d}) + 2d\bar{d}\bar{d}); \frac{1}{2\sqrt{2}}c(u(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) + s(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d}) + 2d\bar{d}\bar{d})$
$D^0$	$\frac{1}{2\sqrt{6}}c(-d(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) + 3s(\bar{s}\bar{u} + \bar{u}\bar{s}) - 2u\bar{u}\bar{u}); \frac{1}{2\sqrt{2}}c(d(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}) + s(\bar{s}\bar{u} + \bar{u}\bar{s}) + 2u\bar{u}\bar{u})$

**Табела 4.1(в).** Маса тетракваркова из мултиплета  $6_A$ .

ознака	ароматска таласна функција
$\Sigma_s^{++}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} cu(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d})$
$\Sigma_s^+$	$\frac{1}{2}c(u(\bar{s}\bar{u} - \bar{u}\bar{s}) + d(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d}))$
$\Sigma_s^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}cd(\bar{s}\bar{u} - \bar{u}\bar{s})$
$\Omega^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}cs(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u})$

**Табела 6.1(г).** Маса тетракваркова из мултиплета  $\bar{3}_A$ .

ознака	ароматска таласна функција
$D_s^+$	$\frac{1}{2}c(d(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d}) - u(\bar{s}\bar{u} - \bar{u}\bar{s}))$

**Табела 4.1(д).** Маса тетракваркова из мешања мултиплета  $6_A$  и  $\bar{3}_A$ .

ознака	ароматска таласна функција
$D^+$	$\frac{1}{2}c(u(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u}) + s(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d})); \frac{1}{2}c(u(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u}) - s(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d}))$
$D^0$	$\frac{1}{2}c(d(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u}) + s(\bar{s}\bar{u} - \bar{u}\bar{s})); \frac{1}{2}c(s(\bar{s}\bar{u} - \bar{u}\bar{s}) - d(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u}))$

## 4.2. Спинске таласне функције

У овом поглављу ћемо показати конструкцију стања мултиплета иредуцибилних SU(2) репрезентација која су изграђена од тензорског производа четири спинске функције. Тако добијамо облик спинске таласне функције за скаларне тетракваркове  $cq\bar{q}\bar{q}$ , тј. за тетракваркове са укупним спином  $S = 0$ . Као и у поглављу 4.1, користимо Клебш-Горданове коефицијенте.

Метод рада је следећи: укупан спин два кварка означимо са  $S_{12}$ , а укупан спин два антикварка са  $S_{34}$ . Пошто је укупан спин  $S (= S_{1234}) = 0$ , за симетричну спинску таласну функцију важи  $S_{12} = 1$  и  $S_{34} = 1$ , док за антисиметричну важи  $S_{12} = 0$  и  $S_{34} = 0$ .

### Извођење облика симетричне спинске таласне функције

Кваркови  $q_1$  и  $q_2$  могу да се посматрају као једна честица са укупном спином 1, а  $\bar{q}_3$  и  $\bar{q}_4$  као друга честица исто са укупним спином 1.

$$S_{12} = 1$$

$$S_{34} = 1$$

$\chi(S, m_s)$  – SU(2) спинска таласна функција

$S$  – укупан спин

$m_s$  – пројекција укупног спина

$$\chi(S = 0, m_s = 0) = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \chi_{12}(1, 1) \cdot \chi_{34}(1, -1) + \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \chi_{12}(1, -1) \cdot \chi_{34}(1, 1) - \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \chi_{12}(1, 0) \cdot \chi_{34}(1, 0) \quad (4.2a)$$

користимо да је:  $\chi(1, 1) = \uparrow\uparrow$

$$\chi(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$$

$$\chi(1, -1) = \downarrow\downarrow$$

$$\begin{aligned} \chi_{MS} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \frac{1}{2} (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (2 \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + 2 \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - (\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow)) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{3}} (\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow - 2 \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - 2 \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow) \end{aligned} \quad (4.2b)$$

### Извођење облика антисиметричне спинске таласне функције

$$S_{12} = 0$$

$$S_{34} = 0$$

$$\chi(S=0, m_s=0) = \chi_{12}(0,0) \cdot \chi_{34}(0,0)$$

користимо да је:  $\chi(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$

$$\begin{aligned} \chi_{MA} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \\ &= \frac{1}{2} |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle \end{aligned} \quad (4.2в)$$

### Симетрична спинска таласна функција за скаларне тетракваркове

$$|\chi_S\rangle = \frac{-1}{2\sqrt{3}} |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - 2\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle \quad (4.2г)$$

Приказана таласна функција има особину симетричности за први пар (измена два кварка) и за други пар (измена два антикварка). Подразумева се да не постоји измена између кварка и антикварка.

### Антисиметрична спинска таласна функција за скаларне тетракваркове

$$|\chi_A\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle \quad (4.2д)$$

Антисиметричност се односи на први пар (кваркови) и на други пар (антикваркови).

## 4.3 Клебш-Горданови коефицијенти

У овом одељку приказаћемо део табеле Клебш-Горданових коефицијената које смо користили у дисертацији. То су коефицијенти за две честице са моментима импулса  $j_1$  и  $j_2$ , а комбинације су следеће:  $j_1 = 1/2, j_2 = 1/2, j_1 = 1, j_2 = 1/2$  и  $j_1 = 1, j_2 = 1$  (табеле 4.3(а)-(в)). Подсетимо се да ови коефицијенти не значе број кваркова у некој честици, већ њихови квадрати представљају вероватноћу за одређену комбинацију кваркова.

Оператор тоталног момента импулса (збир орбиталног и спинског)  $J^2$  има својствена стања  $|jm\rangle$ , где је  $j$  вредност вектора момента импулса и  $m$  вредност пројекције. Полазимо од два комутирајућа оператора момента количине кретања  $J_1$  и  $J_2$ . Тада су ортонормирана својствена стања од  $J_1^2$ :  $|j_1 m_1\rangle$  и од  $J_2^2$ :  $|j_2 m_2\rangle$ . Елементи унитарне матрице  $\langle m_1 m_2 | jm \rangle$  су (према  $|jm\rangle = |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm \rangle$ , где збир иде дуж  $m_1$  од  $-j_1$  до  $j_1$  и дуж  $m_2$  од  $-j_2$  до  $j_2$ ) коефицијенти развијања својствених стања  $|jm\rangle$  помоћу својствених стања  $|m_1 m_2\rangle$ . Они се називају Клебш-Горданови, Вигнерови или коефицијенти векторског спрезања (Šif 1968).

**Табела 4.3(а).** Клебш-Горданови коефицијенти за две честице у стањима  $j_1 = 1/2$  и  $j_2 = 1/2$ .

		$j$			
		1	1	0	1
$m_1$ $m_2$		$m$			
		1	0	0	-1
1/2	1/2	1	0	0	0
1/2	-1/2	0	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$	0
-1/2	1/2	0	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$	0
-1/2	-1/2	0	0	0	1

**Табела 4.3(б).** Клебш-Горданови коефицијенти за две честице у стањима  $j_1 = 1, j_2 = 1/2$ .

		$j$					
		3/2	3/2	1/2	3/2	1/2	3/2
$m_1$ $m_2$		$m$					
		3/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	-3/2
1	1/2	1	0	0	0	0	0
1	-1/2	0	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$	0	0	0
0	1/2	0	$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{1/3}$	0	0	0
0	-1/2	0	0	0	$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{1/3}$	0
-1	1/2	0	0	0	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{2/3}$	0
-1	-1/2	0	0	0	0	0	1



Табела 4.3(в). Клебш-Горданови коефицијенти за две честице у стањима  $j_1 = 1, j_2 = 1$ .

		$j$	2	2	1	2	1	0	2	1	2
		$m$	2	1	1	0	0	0	-1	-1	-2
$m_1$	$m_2$										
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$	0	0	0	0	0	0	0
1	-1	0	0	0	$\sqrt{1/6}$	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/3}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$\sqrt{2/3}$	0	$-\sqrt{1/3}$	0	0	0	0
-1	1	0	0	0	$\sqrt{1/6}$	$-\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/3}$	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$	0	0
-1	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$	0	0
-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

## 5. ЈАКЕ ХИПЕРФИНЕ ИНТЕРАКЦИЈЕ

У овој тези разматрана је могућност да су 27 стања поменутих у поглављу 3 тетракваркови, са Ферми-Брајтовом и Глозман-Рискином хиперфином интеракцијом (ХФИ). Ферми-Брајтова ХФИ се назива још боја-спин (енгл. CS), а Глозман-Рискина ХФИ је аромат-спин (енгл. FS).

Основна интеракција која везује кваркове у недељиве целине (конфајнмент) зависи од боје али и од спина. Ако би то било све, онда би водило до дегенерисаних хадрона са различитим спиновима; зато је уведена хиперфина интеракција која зависи и од спина (и боје, или аромата).

### 5.1. Ферми-Брајтова хиперфина интеракција

Облик Ферми-Брајтове хиперфине интеракције (ФБ ХФИ) (видети De Rujula *et al.* 1975, Liberman 1977, Lucha *et al.* 1991) дат је хамилтонијаном (Silvestre-Brac 1992):

$$H_{FB} = C \sum_{i < j} \frac{\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j}{m_i m_j} (\lambda_i^c \lambda_j^c), \quad (5.1a)$$

где су  $\sigma_i$  – Паулијеве спинске матрице,  $\lambda_i$  – Гел-Манове матрице за боју  $SU(3)_C$  и  $C$  – (позитивна) константа пропорционална константи хиперфине структуре  $\alpha_C$ .

Ова шематска "боја-спин" интеракција између кваркова и антикваркова даје допринос ФБ ХФИ масама тетракваркова:

$$m_{v,FB} = \langle v | \langle \chi | C \sum_{i < j=2}^4 \frac{\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j}{m_i m_j} (\lambda_i^c \lambda_j^c) | \chi \rangle | v \rangle, \quad (5.1b)$$

где су:

$m_i$  – ефективне масе конститутивних кваркова:  $m_u = m_d \neq m_s$ ,

$\chi$  – спинске таласне функције,

$v$  – ароматске таласне функције.

Укупне масе кваркова:  $m_v = m_{v,0} + m_{v,FB}$ . (5.1в)

Као што је објашњено у радовима (De Rujula *et al.* 1975, Schnitzer 1975), Ферми-Брајтова интеракција настаје изменом једног глуона између два тела, тј. између наелектрисаних Диракових честица. Такође је објашњено да се Фермијев члан ове интеракције односи на хиперфино цепање маса, тј. зависи од инверзног производа маса кваркова, док Брајтова интеракција садржи спински зависни део (глуонске интеракције кратког домета) и спински независни део (силе које држе  $q\bar{q}$  парове у синглетима по боји). Користимо израз "шематска" апроксимација што значи да се занемарују сви други потенцијали у систему тетракваркова и остаје само Ферми-Брајтова двочестична интеракција.

Објаснићемо прво како се рачунају производи Паулијевих спинских матрица  $\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j$  за сваки пар у систему од четири кварка са укупним спином 0. Производ  $\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j$  заправо представља спински матрични елемент. За ово извођење користимо следеће:

I полазимо од облика симетричне и антисиметричне спинске таласне функције дате у поглављу 4

II оператор  $\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j$  има својствене вредности (+1) и (-3) за триплетна и синглетна стања, респективно.

III вредности матричних елемената за производе  $\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2$  су:

$$\begin{aligned} \langle \uparrow\downarrow | \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 | \uparrow\downarrow \rangle &= -1 = \langle \downarrow\uparrow | \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 | \downarrow\uparrow \rangle \\ \langle \uparrow\uparrow | \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 | \uparrow\uparrow \rangle &= 1 = \langle \downarrow\downarrow | \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 | \downarrow\downarrow \rangle \\ \langle \downarrow\uparrow | \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 | \uparrow\downarrow \rangle &= 2 = \langle \uparrow\downarrow | \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 | \downarrow\uparrow \rangle \end{aligned} \quad (5.1г)$$

### Израчунавање производа $\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j$ у случају симетричне спинске таласне функције

Полазимо од симетричне спинске таласне функције за скаларне тетракваркове:

$$|\chi_s\rangle = \frac{-1}{2\sqrt{3}} |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - 2\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle \quad (\text{видети поглавље 4.2}),$$

затим рачунамо  $\langle \chi_s | \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j | \chi_s \rangle$  за парове  $q_1 q_2, q_1 \bar{q}_3, q_1 \bar{q}_4, q_2 \bar{q}_3, q_2 \bar{q}_4, \bar{q}_3 \bar{q}_4$ .

- за 1. и 2. честицу:

$$\begin{aligned} \langle \chi_s | \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 | \chi_s \rangle &= \frac{-1}{2\sqrt{3}} \left\langle \left( (\uparrow_1 \downarrow_2 + \downarrow_1 \uparrow_2) \uparrow_3 \downarrow_4 + (\uparrow_1 \downarrow_2 + \downarrow_1 \uparrow_2) \downarrow_3 \uparrow_4 - 2 \uparrow_1 \uparrow_2 \downarrow_3 \downarrow_4 - 2 \downarrow_1 \downarrow_2 \uparrow_3 \uparrow_4 \right) \right. \\ &\quad \left. \times \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \left( (\uparrow_1 \downarrow_2 + \downarrow_1 \uparrow_2) \uparrow_3 \downarrow_4 + (\uparrow_1 \downarrow_2 + \downarrow_1 \uparrow_2) \downarrow_3 \uparrow_4 - 2 \uparrow_1 \uparrow_2 \downarrow_3 \downarrow_4 - 2 \downarrow_1 \downarrow_2 \uparrow_3 \uparrow_4 \right) \right\rangle \frac{-1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Пошто је оператор  $\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2$  производ спинских функција прве две честице, преписујемо само стрелице за спинове тих честица. Спинови остале две честице (треће и четврте) служе да се види који сабирци могу да дају ненулта вредности.

Пример 5.1(а):

$(\langle \uparrow_1 \downarrow_2 | + \langle \downarrow_1 \uparrow_2 |) \langle \uparrow_3 \downarrow_4 |$  значи да треба да се рачунају следећи сабирци:

$$\langle \uparrow\downarrow | \uparrow\downarrow \rangle, \langle \downarrow\uparrow | \downarrow\uparrow \rangle, \langle \uparrow\downarrow | \downarrow\uparrow \rangle, \langle \downarrow\uparrow | \uparrow\downarrow \rangle.$$

Пример 5.2(б):

$\langle \uparrow_1 \downarrow_2 | \langle \downarrow_3 \downarrow_4 | + \langle \downarrow_1 \uparrow_2 | \langle \uparrow_3 \uparrow_4 |$  значи да су ненулта само  $\langle \uparrow\downarrow | \uparrow\downarrow \rangle$  и  $\langle \downarrow\uparrow | \downarrow\uparrow \rangle$ .

$$\langle \chi_S | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 | \chi_S \rangle = \frac{1}{4 \cdot 3} \left( \langle \underbrace{(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)}_I + \underbrace{(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)}_{II} - 2\uparrow\uparrow - 2\downarrow\downarrow | \times \right. \\ \left. \times \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 | (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) + (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) - 2\uparrow\uparrow - 2\downarrow\downarrow \rangle \right)$$

За укупан спин  $S$  и пројекцију укупног спина  $m_s$ , за симетрично стање (а) и антисиметрично (б), важи:

$$(a) |S=1, m_s=1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, |S=1, m_s=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle, |S=1, m_s=-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle,$$

$$\text{одакле добијамо: } |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle = \sqrt{2} |S=1, m_s=0\rangle.$$

$$(b) |S=0, m_s=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle,$$

комбинацијом израза (а) и (б) добијамо:

$$|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|S=1\rangle + |S=0\rangle), |\downarrow\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|S=1\rangle - |S=0\rangle).$$

Међутим, сабирци обележени са I и II не могу међусобно да се комбинују у ненулти матрични елемент јер су 3. и 4. спин у I случају  $\uparrow\downarrow$ , а у II случају  $\downarrow\uparrow$ .

$$\langle \chi_S | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 | \chi_S \rangle = \\ = \frac{1}{12} \left( \sqrt{2} \langle S=1, m_s=0 | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 | S=1, m_s=0 \rangle \sqrt{2} + \sqrt{2} \langle S=1, m_s=0 | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 | S=1, m_s=0 \rangle \sqrt{2} + \right. \\ \left. + (-2) \langle S=1, m_s=1 | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 | S=1, m_s=1 \rangle (-2) + (-2) \langle S=1, m_s=-1 | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 | S=1, m_s=-1 \rangle (-2) \right) \\ \langle \chi_S | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 | \chi_S \rangle = \frac{1}{12} (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1) = 1,$$

- за 1. и 3. честицу:

$$\langle \chi_S | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 | \chi_S \rangle = \\ = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \left( \langle \uparrow_1 \uparrow_3 | \langle \downarrow_2 \downarrow_4 | + \langle \downarrow_1 \downarrow_3 | \langle \uparrow_2 \uparrow_4 | + (\langle \downarrow_1 \uparrow_3 | - 2 \langle \uparrow_1 \downarrow_3 |) \langle \uparrow_2 \downarrow_4 | + (\langle \uparrow_1 \downarrow_3 | - 2 \langle \downarrow_1 \uparrow_3 |) \langle \downarrow_2 \uparrow_4 | \right) \times \\ \times \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 \left( |\uparrow_1 \uparrow_3\rangle |\downarrow_2 \downarrow_4\rangle + |\downarrow_1 \downarrow_3\rangle |\uparrow_2 \uparrow_4\rangle + (|\downarrow_1 \uparrow_3\rangle - 2|\uparrow_1 \downarrow_3\rangle) |\uparrow_2 \downarrow_4\rangle + (|\uparrow_1 \downarrow_3\rangle - 2|\downarrow_1 \uparrow_3\rangle) |\downarrow_2 \uparrow_4\rangle \right) \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ = \frac{1}{12} \left( \langle \uparrow\uparrow | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 | \uparrow\uparrow \rangle + \langle \downarrow\downarrow | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 | \downarrow\downarrow \rangle + A + B \right) = \frac{1}{12} (1 + 1 + A + B),$$

при чему смо увели изразе А и В следећег облика:

$$A = \left( \langle \downarrow\uparrow | - 2 \langle \uparrow\downarrow | \right) \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 \left( |\downarrow\uparrow\rangle - 2|\uparrow\downarrow\rangle \right) \\ = \langle \downarrow\uparrow | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 | \downarrow\uparrow \rangle - 2(-2) \langle \uparrow\downarrow | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 | \uparrow\downarrow \rangle - 2 \langle \downarrow\uparrow | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 | \uparrow\downarrow \rangle - 2 \langle \uparrow\downarrow | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 | \downarrow\uparrow \rangle \\ = -1 + 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -13,$$

$$B = \left( \langle \uparrow\downarrow | - 2 \langle \downarrow\uparrow | \right) \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 \left( |\uparrow\downarrow\rangle - 2|\downarrow\uparrow\rangle \right) = A = -13.$$

Уврштавањем вредности за А и В у израз за  $\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3$ , добијамо:

$$\langle \chi_S | \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 | \chi_S \rangle = -2.$$

- остало:

$$\langle \chi_S | \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_4 | \chi_S \rangle = \langle \chi_S | \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 | \chi_S \rangle = \langle \chi_S | \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_4 | \chi_S \rangle = -2,$$

$$\langle \chi_S | \bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_4 | \chi_S \rangle = 1.$$

### Израчунавање производа $\bar{\sigma}_i\bar{\sigma}_j$ у случају антисиметричне спинске таласне функције

Полазимо од антисиметричне спинске таласне функције за скаларне тетракваркове:

$$|\chi_A\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle \text{ (видети поглавље 4.2),}$$

затим рачунамо  $\langle \chi_A | \bar{\sigma}_i\bar{\sigma}_j | \chi_A \rangle$  за парове  $q_1q_2, q_1\bar{q}_3, q_1\bar{q}_4, q_2\bar{q}_3, q_2\bar{q}_4, \bar{q}_3\bar{q}_4$ .

- за 1. и 2. честицу:

$$\begin{aligned} \langle \chi_A | \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 | \chi_A \rangle &= \frac{1}{2} \left( (\uparrow_1\downarrow_2 - \downarrow_1\uparrow_2) \uparrow_3\downarrow_4 - (\uparrow_1\downarrow_2 - \downarrow_1\uparrow_2) \downarrow_3\uparrow_4 \right) \times \\ &\quad \times \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 \left( (\uparrow_1\downarrow_2 - \downarrow_1\uparrow_2) \uparrow_3\downarrow_4 - (\uparrow_1\downarrow_2 - \downarrow_1\uparrow_2) \downarrow_3\uparrow_4 \right) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{2} \langle S=0, m_s=0 | \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 | S=0, m_s=0 \rangle \sqrt{2} - (-1) \sqrt{2} \langle S=0, m_s=0 | \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 | S=0, m_s=0 \rangle \sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{4} (2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3)) \\ \langle \chi_A | \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 | \chi_A \rangle &= -3, \end{aligned}$$

- за 1. и 3. честицу:

$$\begin{aligned} \langle \chi_A | \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 | \chi_A \rangle &= \frac{1}{2} \left( \langle \uparrow_1\uparrow_3 | \langle \downarrow_2\downarrow_4 | - \langle \downarrow_1\uparrow_3 | \langle \uparrow_2\downarrow_4 | - \langle \uparrow_1\downarrow_3 | \langle \downarrow_2\uparrow_4 | + \langle \downarrow_1\downarrow_3 | \langle \uparrow_2\uparrow_4 | \right) \times \\ &\quad \times \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 \left( |\uparrow_1\uparrow_3\rangle - |\downarrow_2\downarrow_4\rangle \right) |\downarrow_1\uparrow_3\rangle |\uparrow_2\downarrow_4\rangle - |\uparrow_1\downarrow_3\rangle |\downarrow_2\uparrow_4\rangle + |\downarrow_1\downarrow_3\rangle |\uparrow_2\uparrow_4\rangle \Big) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \left( \langle \uparrow\uparrow | \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 | \uparrow\uparrow \rangle - (-1) \langle \downarrow\uparrow | \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 | \downarrow\uparrow \rangle - (-1) \langle \uparrow\downarrow | \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 | \uparrow\downarrow \rangle + \langle \downarrow\downarrow | \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 | \downarrow\downarrow \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 + (-1) + (-1) + 1) \\ \langle \chi_S | \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 | \chi_S \rangle &= 0 \end{aligned}$$

- остало:

$$\langle \chi_A | \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_4 | \chi_A \rangle = \langle \chi_A | \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3 | \chi_A \rangle = \langle \chi_A | \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_4 | \chi_A \rangle = 0,$$

$$\langle \chi_A | \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_4 | \chi_A \rangle = -3.$$

Производи Гел-Манових матрица за боју  $SU(3)_C$  су следећи:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_3 \lambda_4 = -\frac{8}{3} \text{ и } \lambda_1 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4 = -\frac{4}{3}$$

У табели 5.1 дајемо производе  $\lambda_i \lambda_j$  и  $\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j$  за сва четири мултиплета.

**Табела 5.1.** Производи Гел-Манових матрица  $\lambda_i \lambda_j$  за боју  $SU(3)_C$  и Паулијевих спинских матрица  $\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j$  за сва четири мултиплета  $\bar{15}_S$ ,  $\bar{3}_S$ ,  $6_A$  и  $\bar{3}_A$ .

мултиплет	$q_i q_j, \bar{q}_i \bar{q}_j$	$q_i \bar{q}_j$
$\bar{15}_S$ и $\bar{3}_S$	$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_3 \lambda_4 = -8/3$	$\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4 = -4/3$
	$\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_4 = 1$	$\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_4 = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_4 = -2$
$6_A$ и $\bar{3}_A$	$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_3 \lambda_4 = -8/3$	$\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4 = -4/3$
	$\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_4 = -3$	$\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_4 = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_4 = 0$

Када у израз за допринос ФБ ХФИ масама тетракваркова (5.1(б)) уврстимо вредности за производе  $\lambda_i \lambda_j$  и  $\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j$  из табеле 5.1, добијамо следеће изразе за допринос масама код симетричних и антисиметричних мултиплета:

$$m_{v,FB,S} = \frac{8}{3} C \langle v_S | \frac{-1}{m_1 m_2} + \frac{-1}{m_3 m_4} + \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{1}{m_1 m_4} + \frac{1}{m_2 m_3} + \frac{1}{m_2 m_4} | v_S \rangle \text{ (за симетричне мултиплете),} \quad (5.1д)$$

$$m_{v,FB,A} = 8C \langle v_A | \frac{1}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_3 m_4} | v_A \rangle \text{ (за антисиметричне мултиплете).} \quad (5.1ђ)$$

## 5.2. Глозман-Рискина хиперфина интеракција

Облик Глозман-Рискине хиперфине интеракције (ГР ХФИ) дат је хамилтонијаном (Glozman & Riska 1994, 1996):

$$H_{GR} = -C_\chi \sum_{i<j} (-1)^{\alpha^{ij}} (\lambda_i^F \lambda_j^F) (\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j) \quad \text{за мезоне } (q\bar{q}) \text{ и парове } qq, \bar{q}\bar{q} \quad (5.2a)$$

$$(-1)^{\alpha^{ij}} = \begin{cases} -1, & q\bar{q} \\ +1, & qq \vee \bar{q}\bar{q} \end{cases},$$

где су  $\sigma_i$  – Паулијеве спинске матрице,  $\lambda_i$  – Гел-Манове матрице (у овој интеракцији оне репрезентују аромат SU(3)) и  $C_\chi$  – константа.

$$\text{За барионе } (qqq) \text{ ова интеракција има следећи облик: } H_{GR} = -C_\chi \sum_{i<j}^3 (\lambda_i^F \lambda_j^F) (\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j). \quad (5.2б)$$

Ова шематска "аромат-спин" интеракција између кваркова и антикваркова даје следећи допринос ГР ХФИ масама тетракваркова:

$$m_{v,GR} = \langle v \uparrow | -C_\chi \sum_{i<j=2}^4 (-1)^{\alpha^{ij}} \frac{\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j}{m_i m_j} (\lambda_i^F \lambda_j^F) | v \uparrow \rangle, \quad (5.2в)$$

где су:

$m_i$  – ефективне масе конститутивних кваркова:  $m_u = m_d \neq m_s$ ,

$v$  – ароматске таласне функције.

$$\text{Укупне масе кваркова: } m_v = m_{v,0} + m_{v,GR} \quad (5.2г)$$

За тетракваркове  $c_1 q_2 \bar{q}_3 \bar{q}_4$ , рачунају се комбинације  $\lambda_i \lambda_j$  од по 2 кварка за  $i, j = 2, 3, 4$  јер не постоји аромат за  $c$ -кварк у SU(3) групи. Мултиплети  $\bar{15}_S$  и  $\bar{3}_S$  су симетрични, тј. симетрични су само за  $\bar{q}_3 \bar{q}_4$ , али пошто не може да постоји измена између кварка и антикварка, онда се не каже да су они мешано симетрични већ су само симетрични. Мултиплети  $6_A$  и  $\bar{3}_A$  су антисиметрични за  $\bar{q}_3 \bar{q}_4$ .

$$q\bar{q}\bar{q} \text{ у групи } SU(3)_F: 3 \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = \bar{15}_S + \bar{3}_S + \bar{3}_A + 6_A$$

Покажимо прво како се парови кварк-антикварк и антикварк-антикварк распоређују у SU(3)<sub>F</sub> мултиплете:

$$(1) q_2 \bar{q}_3, \quad q_2 \bar{q}_4$$

Кварк и антикварк могу да буду или из мултиплета 8 или из синглета 1.

$$3 \otimes \bar{3} = 1 + 8 \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle 8 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 8 \rangle = \frac{2}{3} \\ \langle 1 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 1 \rangle = -\frac{16}{3} \end{array} \right.$$

члан мултиплета 1 је:  $\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$

чланови мултиплета 8 су:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{d} + \bar{d}u), \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{s} + \bar{s}d), \frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{u} + \bar{u}s), \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{u} + \bar{u}d), \frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{d} + \bar{d}s), \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{s} + \bar{s}u)$$

(ознака  $\bar{\lambda}$  односи се на антикварк)

(2)  $\bar{q}_3\bar{q}_4$

Два антикварка могу да буду или из мултиплета 3 или из мултиплета  $\bar{6}$ .

$$\bar{3} \otimes \bar{3} = 3 + \bar{6} \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle 3 | \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 | 3 \rangle = -\frac{8}{3} \\ \langle \bar{6} | \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 | \bar{6} \rangle = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

чланови 3 су:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{s}\bar{u} - \bar{u}\bar{s})$

чланови  $\bar{6}$  су:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{s}\bar{u} + \bar{u}\bar{s}), \bar{u}\bar{u}, \bar{d}\bar{d}, \bar{s}\bar{s}$

Матрични елементи за  $q\bar{q}$  из мултиплета  $\bar{15}_S$  и  $6_A$  рачунају се за  $R = 8$ :

$$\langle R = 8 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | R = 8 \rangle.$$

Матрични елементи за  $q\bar{q}$  из мултиплета  $\bar{3}_S$  и  $\bar{3}_A$  не рачунају се ни за  $R = 8$  ни за  $R = 1$  већ преко њихове линеарне комбинације.

$$q_2\bar{q}_3\bar{q}_4: 3 \otimes (\bar{3} \otimes \bar{3}) = 3 \otimes (3 + \bar{6}) = (\bar{3}_A + 6_A) + (\bar{15}_S + \bar{3}_S) \quad (1)$$

или

$$(3 \otimes \bar{3}) \otimes \bar{3} = (1 \otimes 8) \otimes \bar{3} = (\bar{3}_{A,S}) + (\bar{3}_{A,S} + \bar{15}_S + 6_A) \quad (2)$$

Различитим редоследом множења морају на крају да се добију исти мултиплети. Из (2) може да се види да су тројке настале из множења синглета са антикварком или из множења октета са антикварком. Не зна се тачно којим множењем је настала симетрична тројка, а којим антисиметрична, па се зато рачуна линеарна комбинација од  $R = 1$  и  $R = 8$ . Обележимо тај производ са  $3_1$  и  $3_8$ :

$$|3_1\rangle_{q\bar{q}\bar{q}} = |1_{q\bar{q}} \otimes \bar{3}_{\bar{q}}\rangle$$



$$|3_8\rangle_{q\bar{q}\bar{q}} = |8_{q\bar{q}} \otimes \bar{3}_{\bar{q}}\rangle$$

Прво изразимо  $\bar{3}_S$  и  $\bar{3}_A$  преко  $3_1$  и  $3_8$ :

$$\begin{pmatrix} |3_S\rangle \\ |3_A\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |3_1\rangle \\ |3_8\rangle \end{pmatrix}$$

$$|3_S\rangle = a_{11}|3_1\rangle + a_{12}|3_8\rangle$$

$$|3_A\rangle = a_{21}|3_1\rangle + a_{22}|3_8\rangle$$

Затим множењем са  $\langle 3_1 |$  можемо да одредимо коефицијенте  $a_{11}$  и  $a_{21}$ :

$$\langle 3_1 | 3_S \rangle = a_{11} \underbrace{\langle 3_1 | 3_1 \rangle}_{=1} + a_{12} \underbrace{\langle 3_1 | 3_8 \rangle}_{=0} = a_{11}$$

$$\langle 3_1 | 3_A \rangle = a_{21} \underbrace{\langle 3_1 | 3_1 \rangle}_{=1} + a_{22} \underbrace{\langle 3_1 | 3_8 \rangle}_{=0} = a_{21}$$

при чему је  $|3_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})\bar{q}\rangle$ ,

где је  $\bar{q} = \bar{u}, \bar{d}$  или  $\bar{s}$  антикварк у зависности од тога да ли се множи са  $cq\bar{q}\bar{u}$ ,  $cq\bar{q}\bar{d}$  или  $cq\bar{q}\bar{s}$  тетракварком.

$|3_S\rangle$  ( $|3_A\rangle$ ) су ароматске таласне функције мултиплета  $3_S$  ( $3_A$ ), с тим што се за овај рачун не узима се у обзир  $c$  кварк.

**Пример 5.2:** израчунавање матричног елемента  $\langle 3_1 | 3_S \rangle$  за честицу  $cq\bar{q}\bar{s}$  из  $3_S$

$$\begin{aligned} \langle 3_1 | 3_S \rangle_{q\bar{q}\bar{s}} &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})\bar{s} \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} (u(\bar{s}u + \bar{u}s) + d(\bar{d}s + \bar{s}d) + 2s\bar{s}s) \right. \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\langle (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})\bar{s} \left| u\bar{u}s + d\bar{d}s + 2s\bar{s}s \right. \right\rangle = \frac{1+1+2}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$a_{11} = \langle 3_1 | 3_S \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad a_{21} = \langle 3_1 | 3_A \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$|3_S\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|3_1\rangle + a_{12}|3_8\rangle$$

$$|3_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|3_1\rangle + a_{22}|3_8\rangle$$

Коефицијенте  $a_{12}$  и  $a_{22}$  можемо да добијемо:

– из услова нормализованости  $3_A$  и  $3_S$

$$\langle 3_S | 3_S \rangle = 1 \Rightarrow a_{12} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \langle 3_A | 3_A \rangle = 1 \Rightarrow a_{22} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

– из услова њихове узајамне ортогоналности

$$\langle 3_A | 3_S \rangle = 0 \Rightarrow a_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}; a_{22} = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Овако добијени коефицијенти  $a_{12}$  и  $a_{22}$  дају следеће изразе за  $|3_S\rangle$  и  $|3_A\rangle$ :

$$|3_S\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|3_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|3_8\rangle$$

$$|3_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|3_1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|3_8\rangle$$

$$\langle 3_S | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 3_S \rangle = \frac{2}{3} \langle 3_1 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 3_1 \rangle + \frac{1}{3} \langle 3_8 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 3_8 \rangle$$

$$\langle 3_A | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 3_A \rangle = \frac{1}{3} \langle 3_1 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 3_1 \rangle + \frac{2}{3} \langle 3_8 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 3_8 \rangle$$

– пошто је  $|3_1\rangle q_2 \bar{q}_3 \bar{q}_4 = |1q_2 \bar{q}_3 \otimes \bar{3} \bar{q}_4\rangle$ , за рачун матричних елемената користи се:

$$\langle 3_1 q_2 \bar{q}_3 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 3_1 q_2 \bar{q}_3 \rangle = \langle 1q_2 \bar{q}_3 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 1q_2 \bar{q}_3 \rangle = \langle R=1 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | R=1 \rangle. \text{ Слично, добија се}$$

$$\langle 3_8 q_2 \bar{q}_3 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 3_8 q_2 \bar{q}_3 \rangle = \langle R=8 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | R=8 \rangle$$

$$\langle 3_S | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 3_S \rangle = \frac{2}{3} \langle 1 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 1 \rangle + \frac{1}{3} \langle 8 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 8 \rangle = -\frac{10}{3}$$

$$\langle 3_A | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 3_A \rangle = \frac{1}{3} \langle 1 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 1 \rangle + \frac{2}{3} \langle 8 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 8 \rangle = -\frac{4}{3}$$

$$\text{мултиплет } \bar{15}_S: \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4 = \langle 8 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 8 \rangle = \frac{2}{3}, \lambda_3 \lambda_4 = \langle \bar{6} | \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 | \bar{6} \rangle = \frac{4}{3}$$

$$\text{мультиплет } \bar{3}_S : \lambda_2\lambda_3 = \lambda_2\lambda_4 = -\frac{10}{3}, \lambda_3\lambda_4 = \langle \bar{6} | \bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_4 | \bar{6} \rangle = \frac{4}{3}$$

$$\text{мультиплет } 6_A : \lambda_2\lambda_3 = \lambda_2\lambda_4 = \langle 8 | \lambda_2\lambda_3 | 8 \rangle = \frac{2}{3}, \lambda_3\lambda_4 = \langle 3 | \bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_4 | 3 \rangle = -\frac{8}{3}$$

$$\text{мультиплет } \bar{3}_A : \lambda_2\lambda_3 = \lambda_2\lambda_4 = -\frac{4}{3}, \lambda_3\lambda_4 = \langle 3 | \bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_4 | 3 \rangle = -\frac{8}{3}.$$

Спински део таласне функције може да се напише као  $|S_i\rangle = \left[ (12)_{S_{12}} (34)_{S_{34}} \right]_S$ , где се спин два кварка куплује у  $S_{12}$  а спин два антикварка у  $S_{34}$  (Vijande et al. 2004). Скаларни тетракваркови имају укупан спин  $S = 0$ . За симетричну спинску таласну функцију важи да је  $S_{12} = 1$  и  $S_{34} = 1$ , тако да за производ Паулијевих спинских матрица имамо:  $\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_4 = 1$  и  $\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_4 = \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_4 = -2$ . За антисиметричну спинску таласну функцију важи  $S_{12} = 0$  и  $S_{34} = 0$ , па је:  $\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_4 = -3$ ,  $\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_4 = \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_4 = 0$ .

У табели 5.2 дајемо производе  $\lambda_i\lambda_j$  и  $\bar{\sigma}_i\bar{\sigma}_j$  за сва четири мультиплета. У другој колони табеле дати су производи за парове кварк-антикварк, а у трећој колони су производи за парове антикварк-антикварк.

**Табела 5.2.** Производи Гел-Манових матрица  $\lambda_i\lambda_j$  за аромат  $SU(3)_F$  и Паулијевих спинских матрица  $\bar{\sigma}_i\bar{\sigma}_j$  за сва четири мультиплета  $\bar{15}_S$ ,  $\bar{3}_S$ ,  $6_A$  и  $\bar{3}_A$ .

мультиплет	$q_i\bar{q}_j$	$\bar{q}_i\bar{q}_j$
$\bar{15}_S$	$\lambda_2\lambda_3 = \lambda_2\lambda_4 = 2/3$	$\lambda_3\lambda_4 = 4/3$
	$\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_4 = -2$	$\bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_4 = 1$
$\bar{3}_S$	$\lambda_2\lambda_3 = \lambda_2\lambda_4 = -10/3$	$\lambda_3\lambda_4 = 4/3$
	$\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_4 = -2$	$\bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_4 = 1$
$6_A$	$\lambda_2\lambda_3 = \lambda_2\lambda_4 = 2/3$	$\lambda_3\lambda_4 = -8/3$
	$\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_4 = 0$	$\bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_4 = -3$
$\bar{3}_A$	$\lambda_2\lambda_3 = \lambda_2\lambda_4 = -4/3$	$\lambda_3\lambda_4 = -8/3$
	$\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_4 = 0$	$\bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_4 = -3$

$$H_{GR} = -C_\chi \sum_{i<j=2}^4 (-1)^{\alpha^{ij}} (\lambda_i^F \lambda_j^F) (\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j); \quad (-1)^{\alpha^{ij}} = \begin{cases} -1, & q\bar{q} \\ +1, & qq \vee \bar{q}\bar{q} \end{cases}$$

$i, j = 2, 3, 4$  ( $\bar{A}\lambda_1$  у групи SU(3))

$$\hat{M}_{GR} = -C_\chi \sum_{i<j=2}^4 (-1)^{\alpha^{ij}} \frac{\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j}{m_i m_j} (\lambda_i \lambda_j); \quad m_{v,GR} = \langle v \uparrow | \hat{M}_{GR} | v \uparrow \rangle$$

Када уврстимо наведене вредности за  $\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j$  и  $\lambda_i \lambda_j$  из табеле 5.2. у последњу једначину, добијемо следеће доприносе ГР ХФИ масама за тетракваркове из четири мултиплета:

$$\bar{15}_S: m_{v,GR} = -\frac{4}{3} C_\chi \langle v \uparrow | \frac{1}{m_2 m_3} + \frac{1}{m_2 m_4} + \frac{1}{m_3 m_4} | v \uparrow \rangle$$

$$\bar{3}_S: m_{v,GR} = \frac{4}{3} C_\chi \langle v \uparrow | \frac{5}{m_2 m_3} + \frac{5}{m_2 m_4} - \frac{1}{m_3 m_4} | v \uparrow \rangle$$

$$6_A, \bar{3}_A: m_{v,GR} = -8 C_\chi \langle v \uparrow | \frac{1}{m_3 m_4} | v \uparrow \rangle.$$

## 6. МАСЕ ТЕТРАКВАРКОВА

Укупну масу тетракваркова добијамо као збир маса без утицаја ХФИ ( $m_{1234}$ ) и доприноса ХФИ ( $m_{\text{HFI}}$ ):  $m(q_1 q_2 \bar{q}_3 \bar{q}_4) = m_{1234} + m_{\text{HFI}}$ .

### 6.1. Маса без утицаја хиперфине интеракције

Масу можемо схватити као очекивану вредност масеног оператора. Масу тетракварка без утицаја хиперфине интеракције рачунамо на основу релације:  $m_\nu = \langle \nu | \hat{M} | \nu \rangle$ , при чему је  $\hat{M} | q \rangle = m_q | q \rangle$ , где је  $\nu$  – ароматска таласна функција,  $\hat{M}$  – оператор масе који делује на физичко стање  $| q \rangle$ ,  $q = u, d, s, c$ .

Пример 6.1(а): израчунавање масе стања 4 из мултиплета  $\bar{15}_S$

- ово стање има кваркни састав  $cq\bar{q}\bar{s}$ <sup>1</sup>, тачније ароматска таласна функција је облика:  $\frac{1}{2}c(u(\bar{s}u + \bar{u}s) - d(\bar{d}s + \bar{s}d))$ , што може да се прикаже као  $\frac{1}{2}(cus\bar{u} + cui\bar{u}\bar{s} - cdd\bar{s} - cds\bar{d})$ . Облик ароматске таласне функције погледати на страни 28 поглавља 4.1.

$$\begin{aligned} m_4 &= \langle \nu_4 | \hat{M} | \nu_4 \rangle = \left\langle \frac{1}{2}cus\bar{u} + cui\bar{u}\bar{s} - cdd\bar{s} - cds\bar{d} \left| \hat{M} \right| \frac{1}{2}cus\bar{u} + cui\bar{u}\bar{s} - cdd\bar{s} - cds\bar{d} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4}(\langle cus\bar{u} | \hat{M} | cus\bar{u} \rangle + \langle cui\bar{u}\bar{s} | \hat{M} | cui\bar{u}\bar{s} \rangle - (-1)\langle cdd\bar{s} | \hat{M} | cdd\bar{s} \rangle - (-1)\langle cds\bar{d} | \hat{M} | cds\bar{d} \rangle) \\ &= \frac{1}{4}((m_c + 2m_u + m_s) + (m_c + 2m_u + m_s) + (m_c + 2m_d + m_s) + (m_c + 2m_d + m_s)) \\ &= \frac{1}{4}(4m_u + 4m_d + 4m_s + 4m_c) = m_u + m_d + m_s + m_c \end{aligned}$$

У апроксимацији  $m_u = m_d$ , добијамо:  $m_4 = 2m_u + m_s + m_c$ .

Израчунате масе свих 27  $cq\bar{q}\bar{q}$  тетракваркних стања дате су у табелама 6.1(а)-(г). У одељку 3.5 дати су квантни бројеви за ова стања. Видимо да нека од њих имају исте квантне бројеве (табеле 3.5(а)-(г)), па због тога долази до мешања између таквих стања. У табелама 6.1(а)-(г) дате су масе без урачунатог мешања стања.

<sup>1</sup> Обратити пажњу да  $q\bar{q}$  може да буде комбинација различитих лаких кваркова, у зависности од конкретног стања.

Табела 6.1.(а) Маса тетракваркова из мултиплета  $\bar{15}_S$  без урачунатог мешања.

	ознака	кваркни састав	$m_{1234}$	$m_{1234}$ ( $m_u = m_d$ )
1	$\Xi^{++}$	$c\bar{u}s\bar{s}$	$m_u + 2m_s + m_c$	$m_u + 2m_s + m_c$
2	$\Xi^+$	$c\bar{d}s\bar{s}$	$m_d + 2m_s + m_c$	$m_u + 2m_s + m_c$
3	$\Sigma_s^{++}$	$c\bar{u}\bar{d}\bar{s}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$
4	$\Sigma_s^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{s}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$
5	$\Sigma_s^0$	$c\bar{d}\bar{u}\bar{s}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$
6	$D_s^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{s}$	$1/2 \cdot (m_u + m_d + 4m_s + 2m_c)$	$m_u + 2m_s + m_c$
7	$\Delta^{++}$	$c\bar{u}\bar{d}\bar{d}$	$m_u + 2m_d + m_c$	$3m_u + m_c$
8	$\Delta^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{d}$	$1/3 \cdot (4m_u + 5m_d + 3m_c)$	$3m_u + m_c$
9	$\Delta^0$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{u}$	$1/3 \cdot (5m_u + 4m_d + 3m_c)$	$3m_u + m_c$
10	$\Delta^-$	$c\bar{d}\bar{u}\bar{u}$	$2m_u + m_d + m_c$	$3m_u + m_c$
11	$D^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{d}$	$1/6 \cdot (m_u + 8m_d + 9m_s + 6m_c)$	$1/2 \cdot (3m_u + 3m_s + 2m_c)$
12	$D^0$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{u}$	$1/6 \cdot (8m_u + m_d + 9m_s + 6m_c)$	$1/2 \cdot (3m_u + 3m_s + 2m_c)$
13	$\Sigma^+$	$c\bar{s}\bar{d}\bar{d}$	$2m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$
14	$\Sigma^0$	$c\bar{s}\bar{u}\bar{d}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$
15	$\Sigma^-$	$c\bar{s}\bar{u}\bar{u}$	$2m_u + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$

Табела 6.1.(б) Маса тетракваркова из мултиплета  $\bar{3}_S$  без урачунатог мешања.

	ознака	кваркни састав	$m_{1234}$	$m_{1234}$ ( $m_u = m_d$ )
1	$D_s^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{s}$	$1/2 \cdot (m_u + m_d + 4m_s + 2m_c)$	$m_u + 2m_s + m_c$
2	$D^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{d}$	$1/2 \cdot (m_u + 4m_d + m_s + 2m_c)$	$1/2 \cdot (5m_u + m_s + 2m_c)$
3	$D^0$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{u}$	$1/2 \cdot (4m_u + m_d + m_s + 2m_c)$	$1/2 \cdot (5m_u + m_s + 2m_c)$

Табела 6.1.(в) Маса тетракваркова из мултиплета  $6_A$  без урачунатог мешања.

	ознака	кваркни састав	$m_{1234}$	$m_{1234}$ ( $m_u = m_d$ )
1	$\Sigma_s^{++}$	$c\bar{u}\bar{d}\bar{s}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$
2	$\Sigma_s^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{s}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$
3	$\Sigma_s^0$	$c\bar{d}\bar{u}\bar{s}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$
4	$D^+$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{d}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$
5	$D^0$	$c\bar{q}\bar{q}\bar{u}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$
6	$\Omega^0$	$c\bar{s}\bar{u}\bar{d}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$

**Табела 6.1.(г)** Месе тетракваркова из мултиплета  $\bar{3}_A$  без урачунатог мешања.

	ознака	кваркни састав	$m_{1234}$	$m_{1234}$ ( $m_u = m_d$ )
1	$D_s^+$	$cq\bar{q}\bar{s}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$
2	$D^+$	$cq\bar{q}\bar{d}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$
3	$D^0$	$cq\bar{q}\bar{u}$	$m_u + m_d + m_s + m_c$	$2m_u + m_s + m_c$

### Рачунање маса мешаних стања

Постоје следећа мешања стања са истим квантним бројевима:

– у оквиру симетричних мултиплета:  $6(\bar{15}_S)$  и  $1(\bar{3}_S)$ ;  $11(\bar{15}_S)$  и  $2(\bar{3}_S)$ ;  $12(\bar{15}_S)$  и  $3(\bar{3}_S)$  (не зна се које стање припада  $\bar{15}_S$  а које припада  $\bar{3}_S$ )

– у оквиру антисиметричних мултиплета:  $4(6_A)$  и  $2(\bar{3}_A)$ ;  $5(6_A)$  и  $3(\bar{3}_A)$  (не зна се које стање припада  $6_A$  а које припада  $\bar{3}_A$ )

Месе мешаних стања рачунају се преко масене матрице и могу да се израчунају на два начина.

#### I начин:

траг матрице једнак је збиру маса две честице које се мешају; уз то важи да је маса једне честице једнака маси честице која се не меша, а налази се на истом месту у мултиплету.

#### II начин:

постављање својственог проблема и налажење маса као решења квадратне једначине.

$$M = \begin{pmatrix} \langle a | \hat{M} | a \rangle & \langle a | \hat{M} | b \rangle \\ \langle b | \hat{M} | a \rangle & \langle b | \hat{M} | b \rangle \end{pmatrix} \quad \text{масена матрица}$$

$a, b$  – ароматске таласне функције две честице са истим квантним бројевима

$$\det(M - \lambda I) = 0 \quad \text{својствени проблем}$$

$\lambda$  – својствена вредност,  $I$  – јединична матрица.

**Пример 6.1(б):** израчунавање маса два мешана стања  $6(\bar{15}_S)$  и  $1(\bar{3}_S)$  из симетричних мултиплета

$M_{6,6} = m_6$  из  $\bar{15}_S$  без мешања

$M_{1,1} = m_1$  из  $\bar{3}_S$  без мешања

$$M_{6,1} = \langle v_6 | \hat{M} | v_1 \rangle; M_{1,6} = \langle v_1 | \hat{M} | v_6 \rangle = M_{6,1}.$$

Маса се рачуна преко масене матрице, тј. преко трага масене матрице. Пошто су  $6(\overline{15}_S)$  и  $4(\overline{15}_S)$  у истој тачки мултиплета  $\overline{15}_S$ , користимо да је  $m_6 \approx m_4$ .

$\text{Tr}M = \lambda_1 + \lambda_2$ , где су  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  масе честица:  $\lambda_1 = m_6$ ,  $\lambda_2 = m_1$ , при чему важи да је  $\lambda_1 \approx m_4$ .

$$(M_{6,6} + M_{1,1} = \lambda_1 + \lambda_2) \wedge (\lambda_1 = m_4) \Rightarrow \lambda_2 = m_6(\overline{15}_S) + m_1(\overline{3}_S) - m_4(\overline{15}_S).$$

**Пример 6.1(в):** израчунавање маса два мешана стања  $4(6_A)$  и  $2(\overline{3}_A)$  из антисиметричних мултиплета

$M_{4,4} = m_4$  из  $6_A$  без мешања

$M_{2,2} = m_2$  из  $\overline{3}_A$  без мешања

$$M_{4,2} = \langle v_4 | \hat{M} | v_2 \rangle; M_{2,4} = \langle v_2 | \hat{M} | v_4 \rangle = M_{4,2}$$

$$M_{4,2} = \frac{1}{2} \left( \langle c u i \bar{u} \bar{d} | \hat{M} | c u i \bar{u} \bar{d} \rangle - \langle c s \bar{d} \bar{s} | \hat{M} | c s \bar{d} \bar{s} \rangle \right) = \frac{1}{2} \left( (m_c + 2m_u + m_d) - (m_c + 2m_s + m_d) \right) = m_u - m_s.$$

Постављамо својствени проблем:  $\det(M - \lambda I) = 0$ , где је  $I$  јединична матрица. Решења  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  својственог проблема масене матрице су масе мешаних стања:

$$\det \begin{pmatrix} M_{4,4} - \lambda & M_{4,2} \\ M_{4,2} & M_{2,2} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \wedge (M_{4,4} = M_{2,2}) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = M_{4,4} - M_{4,2} \\ \lambda_2 = M_{4,4} + M_{4,2} \end{cases}$$

У табелама 6.1(д)-(з) дате су израчунате масе свих 27  $cq\bar{q}\bar{q}$  тетракваркних стања, са урачунатим мешањем одговарајућих стања.

**Табела 6.1(д).** Масе тетракваркова из мултиплета  $\overline{15}_S$ .

честице	$m_{1234}$ ( $m_u = m_d$ )
1, 2 ( $\Xi$ )	$m_u + 2m_s + m_c$
3 – 5 ( $\Sigma_s$ )	$2m_u + m_s + m_c$
7 – 10 ( $\Delta$ )	$3m_u + m_c$
13 – 15 ( $\Sigma$ )	$2m_u + m_s + m_c$

**Табела 6.1(ђ).** Масе мешаних стања тетракваркова из мешања мултиплета  $\overline{15}_S$  и  $\overline{3}_S$ .

честице	$m_{1234}$ ( $m_u = m_d$ )
$6(\overline{15}_S) - 1(\overline{3}_S)$ ( $D_s$ )	$2m_u + m_s + m_c; 3m_s + m_c$
$11(\overline{15}_S) - 2(\overline{3}_S); 12(\overline{15}_S) - 3(\overline{3}_S)$ ( $D$ )	$3m_u + m_c; m_u + 2m_s + m_c$



**Табела 6.1(е).** Маса тетракваркова из мултиплета  $6_A$ .

честице	$m_{1234}$ ( $m_u = m_d$ )
1 – 3 ( $\Sigma_s$ )	$2m_u + m_s + m_c$
6 ( $\Omega$ )	$2m_u + m_s + m_c$

**Табела 6.1(ж).** Маса тетракваркова из мултиплета  $\bar{3}_A$ .

честица	$m_{1234}$ ( $m_u = m_d$ )
1 ( $D_s$ )	$2m_u + m_s + m_c$

**Табела 6.1(з).** Маса мешаних стања тетракваркова из мешања мултиплета  $6_A$  и  $\bar{3}_A$ .

честице	$m_{1234}$ ( $m_u = m_d$ )
$4(6_A) - 2(\bar{3}_A); 5(6_A) - 3(\bar{3}_A)$ (D)	$3m_u + m_c; m_u + 2m_s + m_c$

## 6.2. Утицај Ферми-Брајтове хиперфине интеракције

Као што је речено у одељку 6.1, постоји мешање стања са истим квантним бројевима. Рачунање маса мешаних стања преко масене матрице такође је објашњено у том одељку, а исти метод се примењује и на допринос хиперфине интеракције масама.

Аналитички резултати за допринос ХФИ масама без урачунатог мешања стања, уз апроксимацију  $m_u = m_d$ :

$$m_6(\bar{15}_s) = \frac{4}{3}C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s^2} + \frac{2}{m_s m_c} \right) = m_1(\bar{3}_s)$$

$$m_{11}(\bar{15}_s) = \frac{2}{3}C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{3}{m_s^2} + \frac{4}{m_u m_c} \right) = m_2(\bar{3}_s)$$

$$m_{12}(\bar{15}_s) = \frac{2}{3}C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{3}{m_s^2} + \frac{4}{m_u m_c} \right) = m_3(\bar{3}_s)$$

$$m_4(6_A) = 4C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_s} + \frac{1}{m_u m_c} + \frac{1}{m_s m_c} \right) = m_2(\bar{3}_A)$$

$$m_5(6_A) = 4C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_s} + \frac{1}{m_u m_c} + \frac{1}{m_s m_c} \right) = m_3(\bar{3}_A).$$

Масе мешаних стања израчунате су преко масене матрице на тај начин што је траг матрице једнак збиру маса две честице које се мешају. Други начин (који је служио за проверу) је постављање својственог проблема и налажење маса као решења одговарајуће квадратне једначине.

Пример 6.2: показаћемо на примеру честица  $6(\bar{15}_s)$  и  $1(\bar{3}_s)$  како се добија аналитички резултат за вандијагонални матрични елемент  $\langle 6(\bar{15}_s) | \hat{M} | 1(\bar{3}_s) \rangle$ . Исти је поступак и за остале парове који се мешају.

$$\langle 6(\bar{15}_s) | \hat{M} | 6(\bar{15}_s) \rangle = \frac{4}{3} C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s^2} + \frac{2}{m_s m_c} \right); \quad \langle 1(\bar{3}_s) | \hat{M} | 1(\bar{3}_s) \rangle = \frac{4}{3} C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s^2} + \frac{2}{m_s m_c} \right)$$

$$\begin{aligned} \langle 6(\bar{15}_s) | \hat{M} | 1(\bar{3}_s) \rangle &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle cu\bar{u}\bar{s} + cu\bar{s}\bar{u} - cd\bar{d}\bar{s} - cd\bar{s}\bar{d} + 2cs\bar{s}\bar{s} | \hat{M} \frac{1}{2\sqrt{2}} | cu\bar{u}\bar{s} + cu\bar{s}\bar{u} - cd\bar{d}\bar{s} - cd\bar{s}\bar{d} - 2cs\bar{s}\bar{s} \rangle \\ &= \frac{1}{4 \cdot 2} \left( \langle cu\bar{u}\bar{s} | \hat{M} | cu\bar{u}\bar{s} \rangle + \langle cu\bar{s}\bar{u} | \hat{M} | cu\bar{s}\bar{u} \rangle - (-1) \cdot \langle cd\bar{d}\bar{s} | \hat{M} | cd\bar{d}\bar{s} \rangle - (-1) \cdot \langle cd\bar{s}\bar{d} | \hat{M} | cd\bar{s}\bar{d} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot (-2) \cdot \langle cs\bar{s}\bar{s} | \hat{M} | cs\bar{s}\bar{s} \rangle \right) \end{aligned}$$

Узимајући да је  $m_u = m_d$ , добијамо:

$$\begin{aligned} \langle 6(\bar{15}_s) | \hat{M} | 1(\bar{3}_s) \rangle &= \frac{1}{8} \left( 2 \cdot \langle cu\bar{u}\bar{s} | \hat{M} | cu\bar{u}\bar{s} \rangle + 2 \cdot \langle cu\bar{s}\bar{u} | \hat{M} | cu\bar{s}\bar{u} \rangle - 4 \cdot \langle cs\bar{s}\bar{s} | \hat{M} | cs\bar{s}\bar{s} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \langle cu\bar{u}\bar{s} | \hat{M} | cu\bar{u}\bar{s} \rangle + \langle cu\bar{s}\bar{u} | \hat{M} | cu\bar{s}\bar{u} \rangle - 2 \cdot \langle cs\bar{s}\bar{s} | \hat{M} | cs\bar{s}\bar{s} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{8}{3} C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_c m_s} \right) + \frac{8}{3} C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_c m_s} \right) - 2 \cdot \frac{8}{3} C \left( \frac{1}{m_s^2} + \frac{1}{m_c m_s} \right) \right) \\ &= \frac{2}{3} C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_c m_s} + \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_c m_s} - \frac{2}{m_s^2} - \frac{2}{m_c m_s} \right) \\ &= \frac{2}{3} C \left( \frac{2}{m_u^2} - \frac{2}{m_s^2} \right) = \frac{4}{3} C \left( \frac{1}{m_u^2} - \frac{1}{m_s^2} \right) \\ \langle 1(\bar{3}_s) | \hat{M} | 6(\bar{15}_s) \rangle &= \langle 6(\bar{15}_s) | \hat{M} | 1(\bar{3}_s) \rangle \frac{4}{3} C \left( \frac{1}{m_u^2} - \frac{1}{m_s^2} \right) \end{aligned}$$

Аналитички резултати за вандијагоналне матричне елементе, за  $m_u = m_d$ , су:

$$\begin{aligned}\langle 6(\overline{15}_s) | \hat{M} | 1(\overline{3}_s) \rangle &= \frac{4}{3} C \left( \frac{1}{m_u^2} - \frac{1}{m_s^2} \right) \\ \langle 11(\overline{15}_s) | \hat{M} | 2(\overline{3}_s) \rangle &= \frac{2\sqrt{3}}{3} C \left( -\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s^2} \right) \\ \langle 12(\overline{15}_s) | \hat{M} | 3(\overline{3}_s) \rangle &= \frac{2\sqrt{3}}{3} C \left( -\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s^2} \right) \\ \langle 4(6_A) | \hat{M} | 2(\overline{3}_A) \rangle &= 4C \left( -\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_s} - \frac{1}{m_u m_c} + \frac{1}{m_s m_c} \right) \\ \langle 5(6_A) | \hat{M} | 3(\overline{3}_A) \rangle &= 4C \left( -\frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_s} - \frac{1}{m_u m_c} + \frac{1}{m_s m_c} \right).\end{aligned}$$

Допринос ФБ ХФИ масама тетракваркова дат је у табелама 6.2(а)-(д).

**Табела 6.2(а).** Допринос ФБ ХФИ масама тетракваркова из мултиплета  $\overline{15}_s$ .

честице	$m_{v,FB}$ ( $m_u = m_d$ )
1, 2 ( $\Xi$ )	$\frac{8}{3} C \left( \frac{2}{m_s m_c} + \frac{2}{m_u m_s} - \frac{1}{m_u m_c} - \frac{1}{m_s^2} \right)$
3 – 5 ( $\Sigma_s$ )	$\frac{8}{3} C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s m_c} \right)$
7 – 10 ( $\Delta$ )	$\frac{8}{3} C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_c} \right)$
13 – 15 ( $\Sigma$ )	$\frac{8}{3} C \left( \frac{2}{m_u m_c} + \frac{2}{m_u m_s} - \frac{1}{m_s m_c} - \frac{1}{m_u^2} \right)$

**Табела 6.2(б).** Допринос ФБ ХФИ масама мешаних стања тетракваркова из мешања мултиплета  $\overline{15}_s$  и  $\overline{3}_s$ .

честице	$m_{v,FB}$ ( $m_u = m_d$ )
$6(\overline{15}_s) - 1(\overline{3}_s)$ ( $D_s$ )	$\frac{8}{3} C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s m_c} \right); \frac{8}{3} C \left( \frac{1}{m_s^2} + \frac{1}{m_s m_c} \right)$
$11(\overline{15}_s) - 2(\overline{3}_s); 12(\overline{15}_s) - 3(\overline{3}_s)$ ( $D$ )	$\frac{8}{3} C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_c} \right); \frac{4}{3} C \left( \frac{3}{m_s^2} + \frac{2}{m_u m_c} - \frac{1}{m_u^2} \right)$

**Табела 6.2(в).** Допринос ФБ ХФИ масама тетракваркова из мултиплета  $6_A$ .

честице	$m_{\nu,FB}$ ( $m_u = m_d$ )
1 – 3 ( $\Sigma_s$ )	$8C \left( \frac{1}{m_u m_c} + \frac{1}{m_u m_s} \right)$
6 ( $\Omega$ )	$8C \left( \frac{1}{m_s m_c} + \frac{1}{m_u^2} \right)$

**Табела 6.2(г).** Допринос ФБ ХФИ масама тетракваркова из мултиплета  $\bar{3}_A$ .

честица	$m_{\nu,FB}$ ( $m_u = m_d$ )
1 ( $D_s$ )	$8C \left( \frac{1}{m_u m_c} + \frac{1}{m_u m_s} \right)$

**Табела 6.2(д).** Допринос ФБ ХФИ масама мешаних стања тетракваркова из мешања мултиплета  $6_A$  и  $\bar{3}_A$ .

честице	$m_{\nu,FB}$ ( $m_u = m_d$ )
$4(6_A) - 2(\bar{3}_A); 5(6_A) - 3(\bar{3}_A)$ ( $D$ )	$8C \left( \frac{1}{m_u m_s} + \frac{1}{m_s m_c} \right); 8C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_c} \right)$

### 6.3. Утицај Глозман-Рискине хиперфине интеракције

Аналитички резултати за ХФИ немешане масе, уз апроксимацију  $m_u = m_d$ , су:

$$m_6(\bar{15}_s) = -\frac{2}{3} C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{3}{m_s^2} + \frac{2}{m_u m_s} \right); m_1(\bar{3}_s) = \frac{2}{3} C_\chi \left( \frac{5}{m_u^2} + \frac{9}{m_s^2} + \frac{4}{m_u m_s} \right)$$

$$m_{11}(\bar{15}_s) = -\frac{1}{2} C_\chi \left( \frac{3}{m_u^2} + \frac{2}{m_s^2} + \frac{3}{m_u m_s} \right); m_2(\bar{3}_s) = \frac{1}{3} C_\chi \left( \frac{27}{m_u^2} + \frac{5}{m_s^2} + \frac{4}{m_u m_s} \right)$$

$$m_{12}(\overline{15}_S) = -\frac{1}{2}C_\chi \left( \frac{3}{m_u^2} + \frac{2}{m_s^2} + \frac{3}{m_u m_s} \right); \quad m_3(\overline{3}_S) = \frac{1}{3}C_\chi \left( \frac{27}{m_u^2} + \frac{5}{m_s^2} + \frac{4}{m_u m_s} \right)$$

$$m_4(6_A) = -4C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_s} \right) = m_2(\overline{3}_A)$$

$$m_5(6_A) = -4C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_s} \right) = m_3(\overline{3}_A).$$

Даље, примењујемо већ описан метод за израчунавање доприноса ГР ХФИ масама стања која се мешају.

Допринос ГР ХФИ масама тетракваркова дат је у табелама 6.3(а)-(д).

**Табела 6.3(а).** Допринос ГР ХФИ масама тетракваркова из мултиплета  $\overline{15}_S$ .

честице	$m_{v, GR}$ ( $m_u = m_d$ )
1, 2 ( $\Xi$ )	$-\frac{4}{3}C_\chi \left( \frac{2}{m_s^2} + \frac{1}{m_u m_s} \right)$
3 – 5 ( $\Sigma_S$ )	$-\frac{4}{3}C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u m_s} \right)$
7 – 10 ( $\Delta$ )	$-4C_\chi \frac{1}{m_u^2}$
13 – 15 ( $\Sigma$ )	$-\frac{4}{3}C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u m_s} \right)$

**Табела 6.3(б).** Допринос ГР ХФИ масама мешаних стања тетракваркова из мешања мултиплета  $\overline{15}_S$  и  $\overline{3}_S$ .

честице	$m_{v, GR}$ ( $m_u = m_d$ )
$6(\overline{15}_S) - 1(\overline{3}_S)$ ( $D_S$ )	$-\frac{4}{3}C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u m_s} \right); \quad 4C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s^2} + \frac{1}{m_u m_s} \right)$
$11(\overline{15}_S) - 2(\overline{3}_S); \quad 12(\overline{15}_S) - 3(\overline{3}_S)$ ( $D$ )	$-4C_\chi \frac{1}{m_U^2}; \quad \frac{C_\chi}{6} \left( \frac{69}{m_u^2} + \frac{4}{m_s^2} - \frac{1}{m_u m_s} \right)$

**Табела 6.3(в).** Допринос ГР ХФИ масама тетракваркова из мултиплета  $6_A$ .

честице	$m_{v, GR}$ ( $m_u = m_d$ )
1 - 3 ( $\Sigma_s$ )	$-8C_z \frac{1}{m_u m_s}$
6 ( $\Omega$ )	$-8C_z \frac{1}{m_u^2}$

**Табела 6.3(г).** Допринос ГР ХФИ масама тетракваркова из мултиплета  $\bar{3}_A$ .

честица	$m_{v, GR}$ ( $m_u = m_d$ )
1 ( $D_s$ )	$-8C_z \frac{1}{m_u m_s}$

**Табела 6.3(д).** Допринос ГР ХФИ масама мешаних стања тетракваркова из мешања мултиплета  $6_A$  и  $\bar{3}_A$ .

честице	$m_{v, GR}$ ( $m_u = m_d$ )
4( $6_A$ ); 2( $\bar{3}_A$ ) и 5( $6_A$ ); 3( $\bar{3}_A$ ) (D)	$-8C_z \frac{1}{m_u^2}$ ; $-8C_z \frac{1}{m_u m_s}$

## 7. ИЗРАЧУНАВАЊЕ МАСА КОНСТИТУТИВНИХ КВАРКОВА

За израчунавање маса конститутивних кваркова коришћене су теоријске једначине за масе мезона и бариона, које дајемо у овом поглављу. Експерименталне вредности маса су преузете са сајта (<http://pdg.lbl.gov>) међународне колаборације "*Particle Data Group*" (Amsler *et al.* 2008), где су дате вредности мерења својстава елементарних честица.

Прво смо извели теоријске формуле за ФБ и ГР допринос масама мезона и бариона. Затим је рађен  $\chi^2$  фит маса: лаких мезона ( $\pi$ ,  $K$ ,  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\rho$ ,  $K^*$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ ), тешких мезона ( $D^+$ ,  $D^0$ ,  $D^{*0}$ ,  $D^{*+}$ ,  $D_s^+$ ,  $D_s^{*+}$ ,  $\eta_c$ ,  $J/\psi$ ), лаких бариона ( $N$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$ ,  $\Lambda$ ,  $\Delta$ ,  $\Sigma^*$ ,  $\Xi^*$ ,  $\Omega$ ), тешких бариона ( $\Sigma_c^+$ ,  $\Xi_c^0$ ,  $\Lambda_c$ ,  $\Sigma_c^*$ ,  $\Omega_c$ ).  $\chi^2$  фит маса је рађен на основу следеће релације:

$$\chi^2(\theta) = \sum_{i=1}^N \frac{(F_i(\theta) - y_i)^2}{\sigma_i^2}, \quad (7.1)$$

где су:  $F_i(\theta)$  – функције које се фитују (теоријски предвиђене масе хадрона),  $\theta$  – скуп параметара,  $y_i$  – мерене вредности (експерименталне масе),  $\sigma_i$  – неодређеност масе (узето је да је  $\sigma_i = y_i$ ). Задају се функције које се минимизују (тј. формуле за масе мезона и бариона које смо извели), почетне вредности параметара (масе конститутивних кваркова  $m_{u0}$ ,  $m_{s0}$ ,  $m_{c0}$  и константа,  $C_0$ ) и тачност са којом се фитује (радили смо са тачношћу  $10^{-3}$ ). Као резултат добијамо следеће фитоване параметре:  $m_u$ ,  $m_s$ ,  $m_c$ ,  $C$ . Након добијања ових параметара, искористили смо их за израчунавање маса тетракваркова (видети поглавље 8).

### 7.1. Фит мезона и бариона са Ферми-Брајтовом интеракцијом

Извели смо теоријске једначине за масе мезона (7.1а – 7.1д) и бариона (7.1ђ – 7.1ж) са утицајем Ферми-Брајтове хиперфине интеракције. Тако да имамо скуп једначина за теоријске масе лаких псеудоскаларних мезона, лаких векторских мезона, шармантних мезона, страних шармантних мезона, двоструко шармантних мезона, лаких бариона из октета, лаких бариона из декуплета и тешких бариона. Са десне стране сваке изведене једначине додате су експерименталне вредности маса које су узете из "*Particle Data Group*" (Amsler *et al.* 2008).

У једначинама за масе мезона фигурише константа хиперфине интеракције обележена са  $C^m$ , док је код бариона константа  $C^b$ . Ове две константе нису једнаке, али може да се каже да су истог реда величине, тј.  $C^m \sim C^b$ . Међутим, за израчунавање маса тетракваркова (поглавље 8), потребна нам је константа за тетракваркове  $C^{tetra}$ . За вредност константе код тетракваркова  $C^{tetra}$  може приближно да се узме вредност константе за мезоне  $C^m$  подељена са  $(-16/3)$  јер је матрични елемент синглета у репрезентацији боје једнак  $-16/3$  (хадрони су синглети по боји), а у константи за тетракваркове то је већ садржано. Дакле, бројна вредност је реда величине  $C^{tetra} \sim C^m / (-16/3)$ .

Лаки псеудоскаларни мезони:

$$\begin{aligned}
(m_{\pi} =) & 2m_u - 3C^m / m_u^2 = 140 \text{ MeV}, \\
(m_K =) & m_u + m_s - 3C^m / (m_u \cdot m_s) = 494 \text{ MeV}, \\
(m_{\eta} =) & 2m_u - 3C^m / m_u^2 = 548 \text{ MeV}, \\
(m_{\eta'} =) & 2m_s - 3C^m / m_s^2 = 958 \text{ MeV}.
\end{aligned} \tag{7.1a}$$

Лаки векторски мезони:

$$\begin{aligned}
(m_{\rho} =) & 2m_u + C^m / m_u^2 = 776 \text{ MeV}, \\
(m_{K^*} =) & m_u + m_s + C^m / (m_u \cdot m_s) = 892 \text{ MeV}, \\
(m_{\omega} =) & 2m_u + C^m / m_u^2 = 783 \text{ MeV}, \\
(m_{\phi} =) & 2m_s + C^m / m_s^2 = 1020 \text{ MeV}.
\end{aligned} \tag{7.1б}$$

Шармантни мезони:

$$\begin{aligned}
(m_{D, \pm} =) & m_u + m_c - 3C^m / (m_u \cdot m_c) = 1869 \text{ MeV}, \\
(m_{D, 0} =) & m_u + m_c - 3C^m / (m_u \cdot m_c) = 1865 \text{ MeV}, \\
(m_{D^*, \pm} =) & m_u + m_c + C^m / (m_u \cdot m_c) = 2010 \text{ MeV}, \\
(m_{D^*, 0} =) & m_u + m_c + C^m / (m_u \cdot m_c) = 2007 \text{ MeV}.
\end{aligned} \tag{7.1в}$$

Страни шармантни мезони:

$$\begin{aligned}
(m_{D_s, \pm} =) & m_s + m_c - 3C^m / (m_s \cdot m_c) = 1968 \text{ MeV}, \\
(m_{D_s^*, \pm} =) & m_s + m_c + C^m / (m_s \cdot m_c) = 2112 \text{ MeV}.
\end{aligned} \tag{7.1г}$$

Двоструко шармантни мезони:

$$\begin{aligned}
(m_{\eta_c} =) & 2m_c - 3C^m / m_c^2 = 2980 \text{ MeV}, \\
(m_{J/\psi} =) & 2m_c + C^m / m_c^2 = 3097 \text{ MeV}.
\end{aligned} \tag{7.1д}$$

Лаки бариони (мешано симетричан октет):

$$\begin{aligned}
(m_N =) & 3m_u - 3C^b / (2m_u^2) = 940 \text{ MeV}, \\
(m_{\Sigma} =) & 2m_u + m_s + (2C^b / m_u^2) \cdot (1/4 - m_u / m_s) = 1190 \text{ MeV}, \\
(m_{\Xi} =) & m_u + 2m_s + (2C^b / m_s^2) \cdot (1/4 - m_s / m_u) = 1315 \text{ MeV}, \\
(m_{\Lambda} =) & 2m_u + m_s - 3C^b / (2m_u^2) = 1116 \text{ MeV}.
\end{aligned} \tag{7.1ђ}$$

Лаки бариони (симетричан декуплет):

$$\begin{aligned}
(m_{\Delta} =) & 3m_u + 3C^b / (2m_u^2) = 1232 \text{ MeV}, \\
(m_{\Sigma^*} =) & 2m_u + m_s + (C^b / m_u^2) \cdot (1/2 + m_u / m_s) = 1385 \text{ MeV}, \\
(m_{\Xi^*} =) & m_u + 2m_s + (C^b / m_s^2) \cdot (1/2 + m_s / m_u) = 1530 \text{ MeV}, \\
(m_{\Omega} =) & 3m_s + 3C^b / (2m_s^2) = 1672 \text{ MeV}.
\end{aligned} \tag{7.1е}$$

Тешки бариони:

$$\begin{aligned}
(m_{\Sigma_c} =) & 2m_u + m_c + (2C^b / m_u^2) \cdot (1/4 - m_u / m_c) = 2455 \text{ MeV}, \\
(m_{\Xi_c, +} =) & m_u + 2m_c + (2C^b / m_c^2) \cdot (1/4 - m_c / m_u) = 2470 \text{ MeV}, \\
(m_{\Xi_c, 0} =) & m_u + 2m_c + (2C^b / m_c^2) \cdot (1/4 - m_c / m_u) = 2475 \text{ MeV}, \\
(m_{\Lambda_c} =) & 2m_u + m_c - 3C^b / (2m_u^2) = 2285 \text{ MeV}, \\
(m_{\Sigma_c^*} =) & 2m_u + m_c + (C^b / m_u^2) \cdot (1/2 + m_u / m_c) = 2520 \text{ MeV}, \\
(m_{\Omega_c} =) & 2m_s + m_c + (C^b / m_s^2) \cdot (1/2 + m_s / m_c) = 2698 \text{ MeV}.
\end{aligned} \tag{7.1ж}$$



**Табела 7.1(а).**  $\chi^2$  фит мезона. Табела фитованих вредности маса кваркова  $m_u (= m_d)$ ,  $m_s$ ,  $m_c$  (MeV) и константе хиперфине интеракције  $C^m$  ( $10^7 \text{ MeV}^3$ ). Тачност фитовања је  $10^{-3}$ .

мезони	резултат фита $m$ (MeV), $C^m$ ( $10^7 \text{ MeV}^3$ )	$\chi^2$
$\pi, K, \eta, \eta'$	$m_u = 318, m_s = 515$ $C^m = 1,54$	0,557
$\rho, K^*, \omega, \phi$	$m_u = 306, m_s = 475$ $C^m = 1,59$	$7,49 \cdot 10^{-6}$
$\pi, K, \eta, \eta', \rho, K^*, \omega, \phi$	$m_u = 309, m_s = 503$ $C^m = 1,42$	0,549
$\pi, K, \rho, K^*, \omega, \phi$	$m_u = 309, m_s = 485$ $C^m = 1,52$	$3,90 \cdot 10^{-4}$
$D^+, D^0, D^{*+}, D^{*0}, D_s^+, D_s^{*+}$	$m_u = 457, m_s = 560, m_c = 1516$ $C^m = 3,06$	$4,37 \cdot 10^{-4}$
$\eta_c, J/\psi$	$m_u = 300, m_c = 1519$ $C^m = 1,50$	$4,54 \cdot 10^{-4}$
$D^+, D^0, D^{*+}, D^{*0}, D_s^+, D_s^{*+}, \eta_c, J/\psi$	$m_u = 453, m_s = 548, m_c = 1523$ $C^m = 2,68$	$3,56 \cdot 10^{-4}$
$\pi, K, \eta, \eta', \rho, K^*, \omega, \phi,$ $D^+, D^0, D^{*+}, D^{*0}, D_s^+, D_s^{*+}, \eta_c, J/\psi$	$m_u = 310, m_s = 506, m_c = 1587$ $C^m = 1,50$	0,569
$\pi, K, \rho, K^*, \omega, \phi,$ $D^+, D^0, D^{*+}, D^{*0}, D_s^+, D_s^{*+}, \eta_c, J/\psi$	$m_u = 311, m_s = 485, m_c = 1592$ $C^m = 1,55$	$1,07 \cdot 10^{-2}$

**Табела 7.1(б).**  $\chi^2$  фит бариона. Табела фитованих вредности маса кваркова  $m_u (= m_d)$ ,  $m_s$ ,  $m_c$  (MeV) и константе хиперфине интеракције  $C^b$  ( $10^7 \text{ MeV}^3$ ). Тачност фитовања је  $10^{-3}$ .

бариони	резултат фита $m$ (MeV), $C^b$ ( $10^7 \text{ MeV}^3$ )	$\chi^2$
$N, \Sigma, \Xi, \Lambda$	$m_u = 379, m_s = 545$ $C^b = 1,85$	$7,13 \cdot 10^{-5}$
$\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega$	$m_u = 346, m_s = 531$ $C^b = 1,64$	$1,19 \cdot 10^{-4}$
$N, \Sigma, \Xi, \Lambda, \Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega$	$m_u = 363, m_s = 536$ $C^b = 1,33$	$2,52 \cdot 10^{-4}$
$\Sigma_c, \Xi_c^+, \Xi_c^0, \Lambda_c, \Sigma_c^*, \Omega_c$	$m_u = 773, m_s = 864, m_c = 895$ $C^b = 3,79$	$2,13 \cdot 10^{-3}$
$N, \Sigma, \Xi, \Lambda, \Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega,$ $\Sigma_c, \Xi_c^+, \Xi_c^0, \Lambda_c, \Sigma_c^*, \Omega_c$	$m_u = 377, m_s = 536, m_c = 1273$ $C^b = 1,72$	0,161

У табелама 7.1(а) и 7.1(б) дати су резултати фита маса мезона и бариона. Масе кваркова су дате у MeV, а константа хиперфине интеракције у  $10^7 \text{ MeV}^3$ . Рачун је урађен комбиновањем следећих група честица: за мезоне – лаки псеудоскаларни, лаки векторски, шармантни и двоструко шармантни и за барионе – лаки са спином 1/2, лаки са спином 3/2 и тешки бариони.

Из табеле 7.1(а) види се да је најбољи фит (најмање одступање предвиђених вредности маса од мерених) добијен за лаке векторске мезоне. Код лаких псеудоскаларних мезона на смањен квалитет фита утиче велика разлика експерименталних маса  $\eta$  и  $\pi$  мезона (разлика је око 408 MeV) док су им једначине за масе исте. Поред тога, при одређивању маса конститутивних кваркова, осим  $\eta$  не треба рачунати ни допринос  $\eta'$  јер се ова два стања мешају и не могу добро да се опишу у оквиру овог модела. Из фита маса лаких мезона добијене су мање вредности за масе  $u$  ( $\approx 309 \text{ MeV}$ ) и  $s$  ( $\approx 503 \text{ MeV}$ ) кваркова него из фита бариона и тешких мезона. Фит лаких бариона (табела 7.1(б)) даје нешто веће вредности за та два кварка ( $m_u \approx 363 \text{ MeV}$ ,  $m_s \approx 536 \text{ MeV}$ ), а мању вредност за константу  $C^b$  ( $C^b \approx 1,33 \cdot 10^7 \text{ MeV}^3$ ). Уочава се код фита тешких мезона и тешких бариона да се добијају веће вредности и маса и константе.

## 7.2. Фит мезона и бариона са Глозман-Рискином интеракцијом

Извели смо теоријске једначине за масе мезона (7.2а – 7.2д) и бариона (7.2ђ – 7.2ж) са утицајем Глозман-Рискине хиперфине интеракције (Borka Jovanović 2007а). Једначинама за теоријске масе лаких псеудоскаларних мезона, лаких векторских мезона, шармантних мезона, страних шармантних мезона, двоструко шармантних мезона, лаких бариона из октета, лаких бариона из декуплета и тешких бариона са десне стране додајемо експерименталне вредности маса из "Particle Data Group" (Amsler et al. 2008).

Код ове хиперфине интеракције, константе за мезоне, барионе и тетракваркове су истог реда величине:  $C_\chi^m \sim C_\chi^b \sim C_\chi^{tetra}$ .

Лаки псеудоскаларни мезони:

$$\begin{aligned} (m_\pi) &= 2m_u - 2C_\chi^m / m_u^2 = 140 \text{ MeV}, \\ (m_K) &= m_u + m_s - 2C_\chi^m / (m_u \cdot m_s) = 494 \text{ MeV}, \\ (m_\eta) &= 2m_u - 2C_\chi^m / m_u^2 = 548 \text{ MeV}, \\ (m_{\eta'}) &= 2m_s + 16C_\chi^m / m_s^2 = 958 \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{7.2a}$$

Лаки векторски мезони:

$$\begin{aligned} (m_\rho) &= 2m_u + 2C_\chi^m / (3m_u^2) = 776 \text{ MeV}, \\ (m_{K^*}) &= m_u + m_s + 2C_\chi^m / (3m_u \cdot m_s) = 892 \text{ MeV}, \\ (m_\omega) &= 2m_u + 2C_\chi^m / (3m_u^2) = 783 \text{ MeV}, \\ (m_\phi) &= 2m_s - 16C_\chi^m / (3m_s^2) = 1020 \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{7.2б}$$

Шармантни мезони:

$$\begin{aligned}
 (m_{D, \pm}) &= m_u + m_c - 2C_\chi^m / (m_u \cdot m_c) = 1869 \text{ MeV}, \\
 (m_{D, 0}) &= m_u + m_c - 2C_\chi^m / (m_u \cdot m_c) = 1865 \text{ MeV}, \\
 (m_{D^*, \pm}) &= m_u + m_c + 2C_\chi^m / (3m_u \cdot m_c) = 2010 \text{ MeV}, \\
 (m_{D^*, 0}) &= m_u + m_c + 2C_\chi^m / (3m_u \cdot m_c) = 2007 \text{ MeV}.
 \end{aligned} \tag{7.2в}$$

Страни шармантни мезони:

$$\begin{aligned}
 (m_{D_s, \pm}) &= m_s + m_c - 2C_\chi^m / (m_s \cdot m_c) = 1968 \text{ MeV}, \\
 (m_{D_s^*, \pm}) &= m_s + m_c + 2C_\chi^m / (3m_s \cdot m_c) = 2112 \text{ MeV}.
 \end{aligned} \tag{7.2г}$$

Двоструко шармантни мезони:

$$\begin{aligned}
 (m_{\eta_c}) &= 2m_c - 2C_\chi^m / m_c^2 = 2980 \text{ MeV}, \\
 (m_{J/\psi}) &= 2m_c + 2C_\chi^m / (3m_c^2) = 3097 \text{ MeV}.
 \end{aligned} \tag{7.2д}$$

Лаки бариони (мешано симетричан октет):

$$\begin{aligned}
 (m_N) &= 3m_u - 8C_\chi^b / m_u^2 = 940 \text{ MeV}, \\
 (m_\Sigma) &= 2m_u + m_s - C_\chi^b / m_u^2 \cdot (1 + 7m_u / m_s) = 1190 \text{ MeV}, \\
 (m_\Xi) &= m_u + 2m_s - C_\chi^b / m_s^2 \cdot (1 + 7m_s / m_u) = 1315 \text{ MeV}, \\
 (m_\Lambda) &= 2m_u + m_s - C_\chi^b / m_u^2 \cdot (13 + 11m_u / m_s) / 3 = 1116 \text{ MeV}.
 \end{aligned} \tag{7.2ђ}$$

Лаки бариони (симетричан декуплет):

$$\begin{aligned}
 (m_\Delta) &= 3m_u - 4C_\chi^b / m_u^2 = 1232 \text{ MeV}, \\
 (m_{\Sigma^*}) &= 2m_u + m_s - (8C_\chi^b / (3m_u^2)) \cdot (1/2 + m_u / m_s) = 1385 \text{ MeV}, \\
 (m_{\Xi^*}) &= m_u + 2m_s - (8C_\chi^b / (3m_s^2)) \cdot (1/2 + m_s / m_u) = 1530 \text{ MeV}, \\
 (m_\Omega) &= 3m_s - 4C_\chi^b / m_s^2 = 1672 \text{ MeV}.
 \end{aligned} \tag{7.2е}$$

Тешки бариони:

$$\begin{aligned}
 (m_{\Sigma_c}) &= 2m_u + m_c - C_\chi^b / m_u^2 \cdot (1 + 7m_u / m_c) = 2455 \text{ MeV}, \\
 (m_{\Xi_c, +}) &= m_u + 2m_c - C_\chi^b / m_c^2 \cdot (1 + 7m_c / m_u) = 2470 \text{ MeV}, \\
 (m_{\Xi_c, 0}) &= m_u + 2m_c - C_\chi^b / m_c^2 \cdot (1 + 7m_c / m_u) = 2475 \text{ MeV}, \\
 (m_{\Lambda_c}) &= 2m_u + m_c - C_\chi^b / m_u^2 \cdot (13 + 11m_u / m_c) / 3 = 2285 \text{ MeV}, \\
 (m_{\Sigma_c^*}) &= 2m_u + m_c - (8C_\chi^b / (3m_u^2)) \cdot (1/2 + m_u / m_c) = 2520 \text{ MeV}, \\
 (m_{\Omega_c}) &= 2m_s + m_c - (8C_\chi^b / (3m_s^2)) \cdot (1/2 + m_s / m_c) = 2698 \text{ MeV}.
 \end{aligned} \tag{7.2ж}$$

У табелама 7.2(а) и 7.2(б) дати су резултати фита маса мезона и бариона. Масе кваркова су дате у MeV, а константа хиперфине интеракције у  $10^7 \text{ MeV}^3$ . Рачун је урађен комбиновањем следећих група честица: за мезоне – лаки псеудоскаларни, лаки векторски, шармантни и двоструко шармантни и за барионе – лаки са спином 1/2, лаки са спином 3/2 и тешки бариони.

**Табела 7.2(а).**  $\chi^2$  фит мезона. Табела фитованих вредности маса кваркова  $m_u (= m_d)$ ,  $m_s$ ,  $m_c$  (MeV) и константе хиперфине интеракције  $C_\gamma^m$  ( $10^7 \text{ MeV}^3$ ). Тачност фитовања је  $10^{-3}$ .

мезони	резултат фита $m$ (MeV), $C_\gamma^m$ ( $10^7 \text{ MeV}^3$ )	$\chi^2$
$\pi, K, \eta, \eta'$	$m_u = 221, m_s = 451$ $C_\gamma^m = 0,644$	0,762
$\rho, K^*, \omega, \phi$	$m_u = 357, m_s = 574$ $C_\gamma^m = 0,908$	$7,36 \cdot 10^{-3}$
$\pi, K, \eta, \eta', \rho, K^*, \omega, \phi$	$m_u = 237, m_s = 512$ $C_\gamma^m = 0,524$	1,835
$\pi, K, \rho, K^*, \omega, \phi$	$m_u = 308, m_s = 487$ $C_\gamma^m = 2,25$	$1,56 \cdot 10^{-5}$
$D^+, D^0, D^{*+}, D^{*0}, D_s^+, D_s^{*+}$	$m_u = 550, m_s = 644, m_c = 1426$ $C_\gamma^m = 4,47$	$5,97 \cdot 10^{-5}$
$\eta_c, J/\psi$	$m_c = 1534$ $C_\gamma^m = 1,03$	$1,98 \cdot 10^{-8}$
$D^+, D^0, D^{*+}, D^{*0}, D_s^+, D_s^{*+}, \eta_c, J/\psi$	$m_u = 454, m_s = 547, m_c = 1524$ $C_\gamma^m = 3,96$	$3,51 \cdot 10^{-4}$
$\pi, K, \rho, K^*, D^+, D^0, D^{*+}, D^{*0}, D_s^+, D_s^{*+}, \eta_c, J/\psi$	$m_u = 311, m_s = 487, m_c = 1592$ $C_\gamma^m = 2,35$	$1,07 \cdot 10^{-2}$
$\pi, K, \eta, \eta', \rho, K^*, \omega, \phi, D^+, D^0, D^{*+}, D^{*0}, D_s^+, D_s^{*+}, \eta_c, J/\psi$	$m_u = 207, m_s = 479, m_c = 1624$ $C_\gamma^m = 0,527$	1,062

**Табела 7.2(б).**  $\chi^2$  фит бариона. Табела фитованих вредности маса кваркова  $m_u (= m_d)$ ,  $m_s$ ,  $m_c$  (MeV) и константе хиперфине интеракције  $C_\gamma^b$  ( $10^7 \text{ MeV}^3$ ). Тачност фитовања је  $10^{-3}$ .

бариони	резултат фита $m$ (MeV), $C_\gamma^b$ ( $10^7 \text{ MeV}^3$ )	$\chi^2$
$N, \Sigma, \Xi, \Lambda$	$m_u = 436, m_s = 577$ $C_\gamma^b = 0,847$	$8,65 \cdot 10^{-4}$
$\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega$	$m_u = 491, m_s = 609$ $C_\gamma^b = 1,43$	$3,87 \cdot 10^{-6}$
$N, \Sigma, \Xi, \Lambda, \Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega$	$m_u = 427, m_s = 571$ $C_\gamma^b = 0,575$	$2,61 \cdot 10^{-2}$
$\Sigma_c, \Xi_c^+, \Xi_c^0, \Lambda_c, \Sigma_c^*, \Omega_c$	$m_u = 316, m_s = 534, m_c = 1227$ $C_\gamma^b = 1,17$	0,515
$N, \Sigma, \Xi, \Lambda, \Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega, \Sigma_c, \Xi_c^+, \Xi_c^0, \Lambda_c, \Sigma_c^*, \Omega_c$	$m_u = 426, m_s = 537, m_c = 1264$ $C_\gamma^b = 0,55$	0,189

Из табела 7.2(a) и (б) можемо да видимо резултате различитих фита. У случају фита свих мезона осим два пара који се мешају ( $\eta - \eta'$ ,  $\omega - \phi$ ) (Bogka Jovanović 2007a) и свих бариона видимо да су из фита мезона израчунате масе  $u$  и  $s$  кваркова нешто мање ( $m_u = 311 \text{ MeV}$ ,  $m_s = 487 \text{ MeV}$ ) него из фита бариона ( $m_u = 426 \text{ MeV}$ ,  $m_s = 537 \text{ MeV}$ ). Због мање вредности  $\chi^2$  масе добијене из фита мезона су поузданије. Оба ова фита дају сличне вредности за константу  $C_\chi$  ( $\sim 0,5 \cdot 10^7 \text{ MeV}^3$ ).

Постоје неодређености код израчунавања маса конститутивних кваркова јер користимо модел са шематском апроксимацијом. Из различитих комбинација једначина (7.1a – 7.1ж и 7.2a – 7.2ж) добијамо вредности за масе које се мало разликују, али све су из очекиваног интервала за масе конститутивних кваркова (Feng 2008, Feng *et al.* 2008).

Као што може да се види из табеле 2 у раду Фенга 2008 или из табеле 2 у раду Фенга и сарадника 2008 и из референци у тим радовима, наша предвиђања за масе конститутивних кваркова су приближна са предвиђањима маса добијеним коришћењем различитих феноменолошких модела.

### 7.3. Процена грешки за масе конститутивних кваркова

У овом поглављу дајемо процену грешки за масе конститутивних кваркова (Bogka Jovanović *et al.*, у припреми). За ову процену можемо да искористимо било коју групу једначина из поглавља 7.1 и 7.2: то су једначине за масе мезона и бариона са хиперфиним интеракцијама 7.1(a) – 7.1(ж) и 7.2(a) – 7.2(ж).

Прво смо урадили процену грешки на основу једначина за масе мезона, са утицајем Ферми-Брајтове хиперфине интеракције. То су једначине 7.1(a) – 7.1(д), с тим што трећу и четврту једначину из групе 7.1(a) у овом рачуну нисмо узели у обзир (због мешања  $\eta$  и  $\eta'$ ). За тај рачун користили смо вишедименциони фит маса методом најмањих квадрата помоћу модификованог потпрограма "lfit" из Нумеричких рецепата у FORTRAN-у (Press *et al.* 1992). Фитују се сви параметри:  $m_u$ ,  $m_s$ ,  $m_c$ , и константа  $C^m$  тако што се минимизује  $\chi$ -квадрат између мерених и теоријских маса. Једначине 7.1(a) – 7.1(д) су претходно линеаризоване помоћу развоја у Тејлоров ред (закључно са првим степеном) и на тај начин је добијен одговарајући систем линеарних једначина за разлике између експерименталних и теоријских маса у којима су поправке параметара непознате које треба одредити. Поправке параметара, као и њима одговарајуће грешке, одређујемо користећи метод најмањих квадрата, а затим параметре поправљамо за вредности тако добијених поправки и са тако поправљеним вредностима параметара понављамо претходну процедуру. Овај поступак се понавља све док фит конвергира, тј. док  $\chi$ -квадрат између мерених и теоријских маса опада. На тај начин, након више итерација, добијамо коначне вредности за параметре и њихове грешке. У пракси је за сваки анализирани систем једначина добијена брза конвергенција, чак и у случају када се почетне вредности параметара знатно разликују од њихових финалних вредности, што иде у прилог исправности теоријског модела као и самог метода фитавања. Нпр., када се узме да су

почетне вредности свих параметара једнаке 1, фит мезона са доприносом ФБ ХФИ конвергира после 7 итерација.

На основу једначина 7.1(а) – 7.1(д), добијене вредности су:

$$\begin{aligned} m_u &= (330,70 \pm 0,24) \text{ MeV} \\ m_s &= (480,04 \pm 0,36) \text{ MeV} \\ m_c &= (1565,01 \pm 0,27) \text{ MeV} \\ C^m &= (1,7180 \pm 0,0038) \cdot 10^7 \text{ MeV}^3. \end{aligned}$$

Ради провере вредности апсолутних грешки, такође смо урадили и процену грешки на основу једначина за масе мезона, са утицајем Глозман-Рискине хиперфине интеракције. То су једначине 7.2(а) – 7.2(д). Када су почетне вредности свих параметара једнаке 1, овај фит конвергира после 5 итерација и добијене су следеће вредности:

$$\begin{aligned} m_u &= (306,63 \pm 0,23) \text{ MeV} \\ m_s &= (589,14 \pm 0,33) \text{ MeV} \\ m_c &= (1553,55 \pm 0,28) \text{ MeV} \\ C_\chi^m &= (2,0720 \pm 0,0050) \cdot 10^7 \text{ MeV}^3. \end{aligned}$$

Видимо да су процењене апсолутне грешке за масе конститутивних кваркова мање од 1 MeV. Због тога у тексту доктората масе конститутивних кваркова нисмо наводили са грешком. Такође, за масе мезона, бариона и тетракваркова није навођена грешка.

У табелама 7.3(а) и (б) дајемо вредности маса тетракваркова израчунатих са овим вредностима кваркова, а константу за тетракваркове фитујемо тако да за вредност масе стања  $D_s(2317)$  добијамо најприближнију вредност мереној маси:  $3,155 \cdot 10^7 \text{ MeV}^3$  у табели 7.3(а) и  $0,991 \cdot 10^7 \text{ MeV}^3$  у табели 7.3(б).

**Табела 7.3(а).** Масе (MeV) скаларних  $cq\bar{q}\bar{q}$  тетракваркова са утицајем ФБ ХФИ.

мултиплет	тетракварк	$m_v$ (MeV)
$\bar{15}_S$	$\Xi$	2714
	$\Sigma_s$	2541
	$\Delta$	2382
	$\Sigma$	2612
$\bar{15}_S - \bar{3}_S$	$D_s (\bar{15}_S - \bar{3}_S)$	2541; 2916
	$D (\bar{15}_S - \bar{3}_S)$	2382; 2795
$6_A$	$\Sigma_s$	2317
	$\Omega$	2211
$\bar{3}_A$	$D_s$	2317
$6_A - \bar{3}_A$	$D (6_A - \bar{3}_A)$	2196; 2332

**Табела 7.3(б).** Масе (MeV) скаларних  $cq\bar{q}\bar{q}$  тетракваркова са утицајем ГР ХФИ.

мултиплет	тетракварк	$m_v$ (MeV)
$\bar{15}_S$	$\Xi$	2889
	$\Sigma_s$	2469
	$\Delta$	2052
	$\Sigma$	2469
$\bar{15}_S - \bar{3}_S$	$D_s (\bar{15}_S - \bar{3}_S)$	2469; 4076
	$D (\bar{15}_S - \bar{3}_S)$	2052; 4260
$6_A$	$\Sigma_s$	2317
	$\Omega$	1913
$\bar{3}_A$	$D_s$	2317
$6_A - \bar{3}_A$	$D (6_A - \bar{3}_A)$	1630; 2600

## 8. МАСЕНИ СПЕКТАР $cq\bar{q}\bar{q}$

Масе скаларних  $cq\bar{q}\bar{q}$  тетракваркова, са утицајем хиперфине интеракције на масе свих 27 честица, дате су у табелама 8.1 и 8.2. У другој колони (код обе табеле) су масе без утицаја ХФИ и у трећој колони је ХФИ допринос масама. Аналитичке формуле за ХФИ масе добијене су преко матричних елемената (видети поглавље 5):

$$m_{v,HFI} = \langle v | \langle \chi | \hat{M}_{HFI} | \chi \rangle | v \rangle, \quad (8.1)$$

где су  $v$  – ароматска таласна функција,  $\chi$  – спинска таласна функција,  $H_{HFI}$  – Хамилтонијан ХФИ интеракције, уз апроксимацију  $m_u = m_d$ .

У нашем моделу, за израчунавања вредности маса, ФБ и ГР хиперфине интеракције су калибрисане помоћу мезона и бариона и затим употребљене код тетракваркова (рачун видети у поглављу 7).

### 8.1. Масени спектар са Ферми-Брајтовом интеракцијом

У табели 8.1 дати су изрази за масе свих 27 тетракваркова са утицајем Ферми-Брајтове хиперфине интеракције (Borka Jovanović 2007b, 2008b).

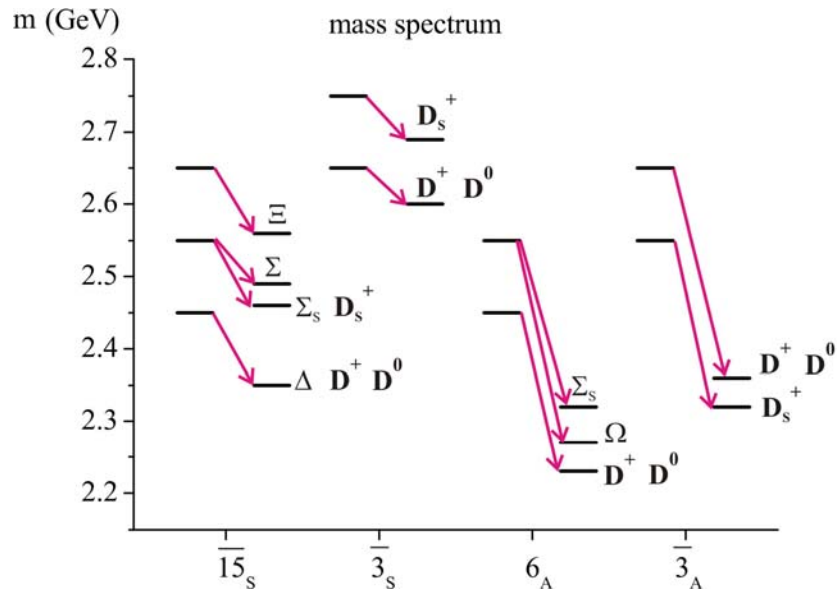
Пошто су вредности слободних параметара ( $m_{u,d}$ ,  $m_s$ ,  $m_c$ ,  $C$ ) добијене фитом експерименталних маса мезона и бариона, са тим вредностима могу да се израчунају масе тетракваркова. У случају лаких мезона и бариона, маса  $c$  кварка није садржана у њиховим масама па се  $m_c$  додаје као "спољни" параметар. Може, на пример, у том случају за  $m_c$  да се узме вредност која за масу стања  $D_s(2317)$  даје најприближнију вредност мереној маси.

Приказаћемо неколико примера масених спектра тетракваркова са утицајем ФБ ХФИ (слике 8.1(а)-(ћ)), са ознакама и са распоредом по мултиплетима као што је објашњено у ранијим поглављима. Бројне вредности маса тетракваркова које одговарају овим графицима дате су у табелама 8.1(а)-(ћ). Спектре тетракваркова смо рачунали на основу табеле 8.1, из бројних вредности конститутивних кваркова добијених из фита маса хадрона (фит погледати у поглављу 7). У случају фитовања маса свих мезона и бариона или тешких мезона и бариона, користили смо све вредности добијене из фита. Али у случају фитовања маса лаких хадрона, пошто лаки мезони и лаки бариони не садрже  $c$ -кварк, фитовали смо масу  $m_c$  тако да добијемо масу најнижег стања из мешања  $6_A - \bar{3}_A$  исту као масу  $D_s^+(2317)$ , тј. да буде 2317 MeV (Borka Jovanović 2007b, 2008b). Стрелице на графицима показују промену маса када се урачуна утицај Ферми-Брајтове хиперфине интеракције. Може да се запази да ХФИ одређује раздвајање маса у спектру, тј. фину структуру спектра. За мешање стања може да се каже да доводи до раздвајања два стања. Видимо да ФБ ХФИ смањује масе тетракваркова и да је узрок раздвајања између стања  $\Sigma$  and  $\Sigma_s (D_s)$  у мултиплету  $\bar{15}_S$  и између  $\Sigma_s$  и  $\Omega$  у мултиплету  $6_A$ .

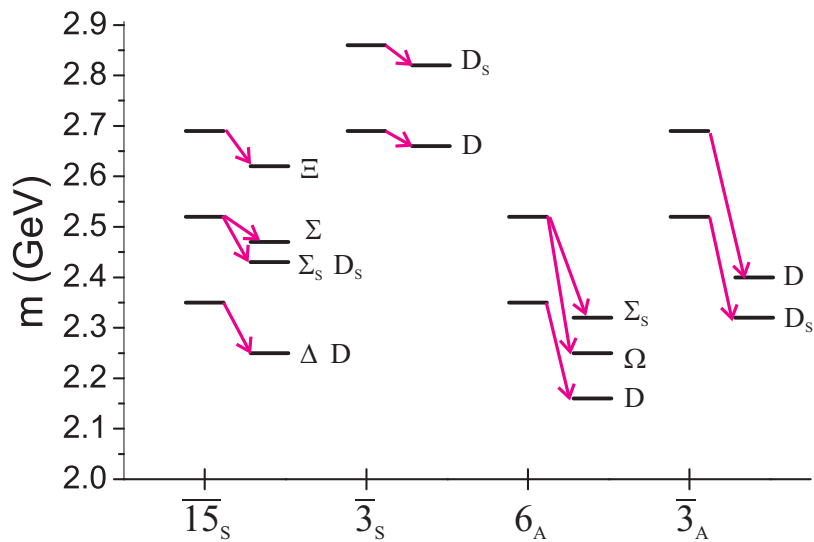
**Табела 8.1.** Масе скаларних  $s\bar{q}q\bar{q}$  тетракваркова распоређених по  $SU(3)_F$  мултиплетима, са мешањем између стања са истим квантним бројевима.  $m_{v,0}$  су масе тетракваркова без утицаја ФБ ХФИ и  $m_{v,FB}$  су ФБ ХФИ доприноси масама тетракваркова.

тетракварк	$m_{v,0}$	$m_{v,FB}$ ( $m_u = m_d$ )
мултиплет $\overline{15}_S$		
$\Xi$	$m_u + 2m_s + m_c$	$\frac{8}{3}C \left( \frac{2}{m_s m_c} + \frac{2}{m_u m_s} - \frac{1}{m_u m_c} - \frac{1}{m_s^2} \right)$
$\Sigma_s$	$2m_u + m_s + m_c$	$\frac{8}{3}C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s m_c} \right)$
$\Delta$	$3m_u + m_c$	$\frac{8}{3}C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_c} \right)$
$\Sigma$	$2m_u + m_s + m_c$	$\frac{8}{3}C \left( \frac{2}{m_u m_c} + \frac{2}{m_u m_s} - \frac{1}{m_s m_c} - \frac{1}{m_u^2} \right)$
мешање $\overline{15}_S - \overline{3}_S$		
$D_s (\overline{15}_S - \overline{3}_S)$	$2m_u + m_s + m_c; 3m_s + m_c$	$\frac{8}{3}C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s m_c} \right); \frac{8}{3}C \left( \frac{1}{m_s^2} + \frac{1}{m_s m_c} \right)$
$D (\overline{15}_S - \overline{3}_S)$	$3m_u + m_c; m_u + 2m_s + m_c$	$\frac{8}{3}C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_c} \right); \frac{4}{3}C \left( \frac{3}{m_s^2} + \frac{2}{m_u m_c} - \frac{1}{m_u^2} \right)$
мултиплет $6_A$		
$\Sigma_s$	$2m_u + m_s + m_c$	$8C \left( \frac{1}{m_u m_s} + \frac{1}{m_u m_c} \right)$
$\Omega$	$2m_u + m_s + m_c$	$8C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s m_c} \right)$
мултиплет $\overline{3}_A$		
$D_s$	$2m_u + m_s + m_c$	$8C \left( \frac{1}{m_u m_s} + \frac{1}{m_u m_c} \right)$
мешање $6_A - \overline{3}_A$		
$D (6_A - \overline{3}_A)$	$3m_u + m_c; m_u + 2m_s + m_c$	$8C \left( \frac{1}{m_u m_s} + \frac{1}{m_s m_c} \right); 8C \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_c} \right)$

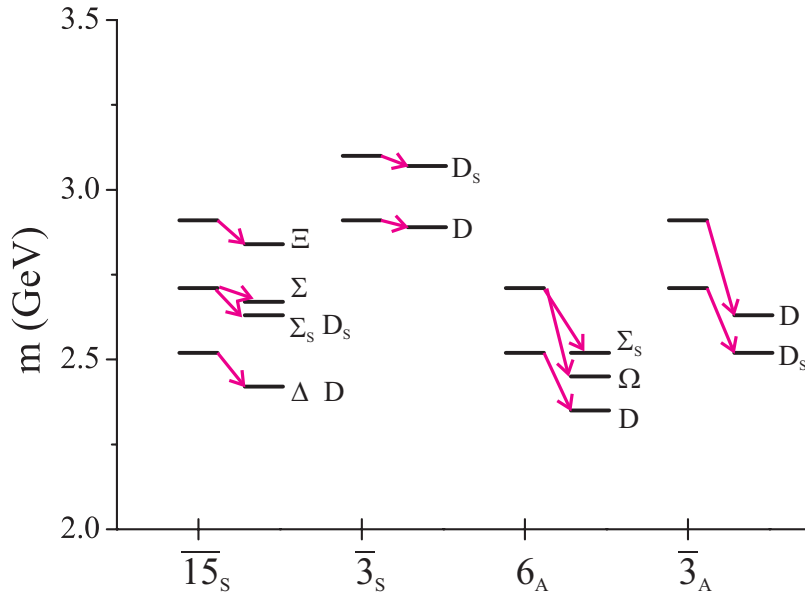




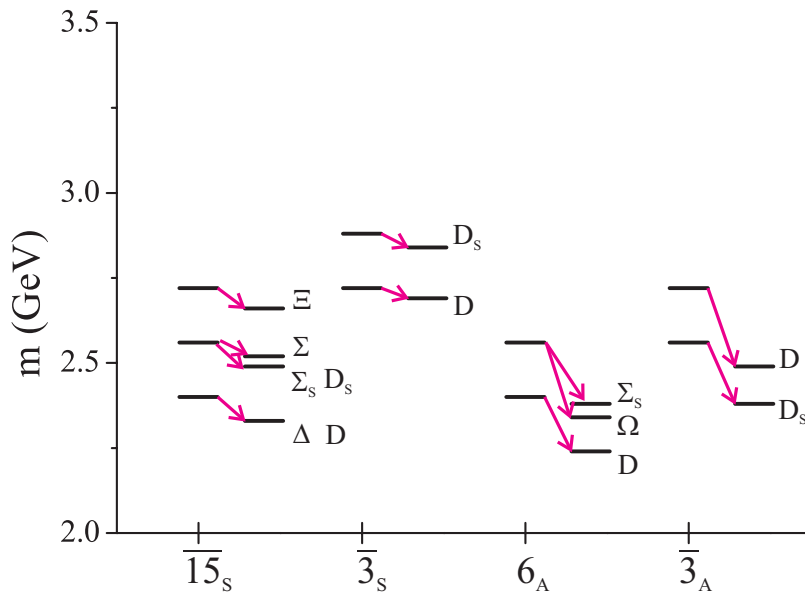
**Слика 8.1(а).** Масени спектар тетракваркова без (лева колона) и са (десна колона) ФБ ХФИ, обе са  $SU(3)_F$  нарушењем симетрије. Спектар је добијен са  $m_u = 310$  MeV из фита лаких мезона и разликом маса  $m_s$  и  $m_u$  од 100 MeV. За вредност константе узето је  $C^m = 0,16$  GeV  $\cdot (m_u [\text{GeV}])^2 = 1,5376 \cdot 10^7$  MeV<sup>3</sup> ( $C^{tetra} = -0,2883 \cdot 10^7$  MeV<sup>3</sup>). За вредност масе  $c$  кварка узето је  $m_c = 1518$  MeV.



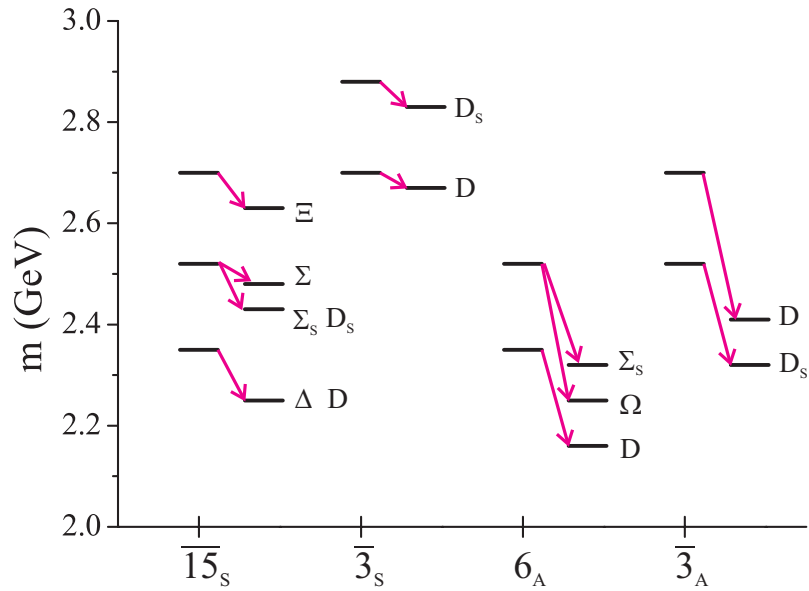
**Слика 8.1(б).** Масени спектар добијен из фита  $\pi$ , K и  $\rho$  мезона  $m_u = 310$  MeV,  $m_s = 480$  MeV,  $C^m = 1,5 \cdot 10^7$  MeV<sup>3</sup> ( $C^{tetra} = -0,2812 \cdot 10^7$  MeV<sup>3</sup>). За вредност масе  $c$  кварка узето је  $m_c = 1419$  MeV.



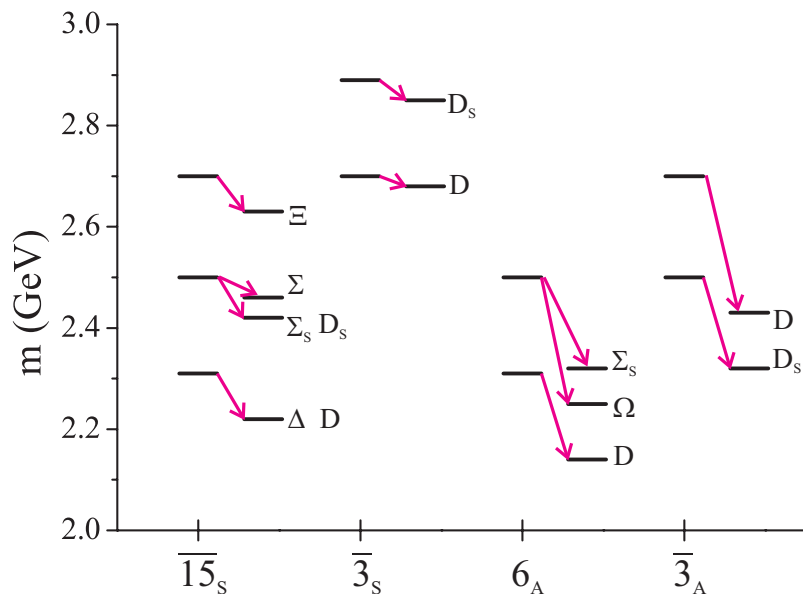
**Слика 8.1(в).** Масени спектар добијен из фита свих мезона  $m_u = 310$  MeV,  $m_s = 506$  MeV,  $m_c = 1587$  MeV,  $C^m = 1,5 \cdot 10^7$  MeV<sup>3</sup> ( $C^{tetra} = -0,2812 \cdot 10^7$  MeV<sup>3</sup>).



**Слика 8.1(г).** Масени спектар добијен из фита свих бариона  $m_u = 377$  MeV,  $m_s = 536$  MeV,  $m_c = 1273$  MeV,  $C^b = 1,72 \cdot 10^7$  MeV<sup>3</sup> ( $C^{tetra} = -0,3225 \cdot 10^7$  MeV<sup>3</sup>).



**Слика 8.1(д).** Масени спектар добијен из фита мезона, без мешаних стања  $\eta$ - $\eta'$  и  $\omega$ - $\phi$ ,  $m_u = 312 \text{ MeV}$ ,  $m_s = 488 \text{ MeV}$ ,  $m_c = 1413 \text{ MeV}$ ,  $C^b = 1,57 \cdot 10^7 \text{ MeV}^3$  ( $C^{tetra} = -0,2944 \cdot 10^7 \text{ MeV}^3$ ).



**Слика 8.1(ђ).** Масени спектар добијен из фита лаких мезона  $m_u = 309 \text{ MeV}$ ,  $m_s = 503 \text{ MeV}$ ,  $C^b = 1,42 \cdot 10^7 \text{ MeV}^3$  ( $C^{tetra} = -0,2662 \cdot 10^7 \text{ MeV}^3$ ). За вредност масе  $c$  кварка узето је  $m_c = 1383 \text{ MeV}$ .

**Табела 8.1(а).** Бројне вредности маса скаларних  $sq\bar{q}\bar{q}$  тетракваркова (у MeV) распоређених по  $SU(3)_F$  мултиплетима, са мешањем између стања са истим квантним бројевима.  $m_{v,0}$  су масе тетракваркова без утицаја ФБ ХФИ,  $m_{v,FB}$  су ФБ ХФИ доприноси масама тетракваркова и  $m_v$  су укупне масе тетракваркова. Бројне вредности одговарају слици 8.1(а).

мултиплет	тетракварк	$m_{v,0}$ (MeV)	$m_{v,FB}$ (MeV)	$m_v$ (MeV)
$\bar{15}_s$	$\Xi$	2648	-84	2564
	$\Sigma_s$	2548	-92	2456
	$\Delta$	2448	-96	2352
	$\Sigma$	2548	-61	2487
$\bar{15}_s - \bar{3}_s$	$D_s (\bar{15}_s - \bar{3}_s)$	2548; 2748	-92; -58	2456; 2690
	$D (\bar{15}_s - \bar{3}_s)$	2448; 2648	-96; -45	2352; 2603
$6_A$	$\Sigma_s$	2548	-230	2318
	$\Omega$	2548	-277	2271
$\bar{3}_A$	$D_s$	2548	-230	2318
$6_A - \bar{3}_A$	$D (6_A - \bar{3}_A)$	2448; 2648	-219; -289	2229; 2359

**Табела 8.1(б).** Бројне вредности маса тетракваркова (у MeV) које одговарају слици 8.1(б).

мултиплет	тетракварк	$m_{v,0}$ (MeV)	$m_{v,FB}$ (MeV)	$m_v$ (MeV)
	$\Xi$	2689	-73	2616
	$\Sigma_s$	2519	-89	2430
	$\Delta$	2349	-95	2254
	$\Sigma$	2519	-46	2473
$\bar{15}_s - \bar{3}_s$	$D_s (\bar{15}_s - \bar{3}_s)$	2519; 2859	-89; -44	2430; 2815
	$D (\bar{15}_s - \bar{3}_s)$	2349; 2689	-95; -27	2254; 2662
$6_A$	$\Sigma_s$	2519	-202	2317
	$\Omega$	2519	-267	2252
$\bar{3}_A$	$D_s$	2519	-202	2317
$6_A - \bar{3}_A$	$D (6_A - \bar{3}_A)$	2349; 2689	-184; -285	2165; 2404

**Табела 8.1(в).** Бројне вредности маса тетракваркова (у MeV) које одговарају слици 8.1(в).

мултиплет	тетракварк	$m_{v,0}$ (MeV)	$m_{v,FB}$ (MeV)	$m_v$ (MeV)
	$\Xi$	2929	-70	2839
	$\Sigma_s$	2713	-87	2626
	$\Delta$	2517	-93	2424
	$\Sigma$	2317	-39	2674
$\overline{15}_s - \overline{3}_s$	$D_s (\overline{15}_s - \overline{3}_s)$	2317; 3105	-87; -39	2626; 3066
	$D (\overline{15}_s - \overline{3}_s)$	2517; 2909	-93; -20	2424; 2889
$6_A$	$\Sigma_s$	2713	-189	2524
	$\Omega$	2713	-262	2451
$\overline{3}_A$	$D_s$	2713	-189	2524
$6_A - \overline{3}_A$	$D (6_A - \overline{3}_A)$	2517; 2909	-171; -280	2346; 2629

**Табела 8.1(г).** Бројне вредности маса тетракваркова (у MeV) које одговарају слици 8.1(г).

мултиплет	тетракварк	$m_{v,0}$ (MeV)	$m_{v,FB}$ (MeV)	$m_v$ (MeV)
	$\Xi$	2722	-62	2660
	$\Sigma_s$	2563	-73	2490
	$\Delta$	2404	-78	2326
	$\Sigma$	2563	-48	2515
$\overline{15}_s - \overline{3}_s$	$D_s (\overline{15}_s - \overline{3}_s)$	2563; 2881	-73; -43	2490; 2838
	$D (\overline{15}_s - \overline{3}_s)$	2404; 2722	-78; -33	2254; 2689
$6_A$	$\Sigma_s$	2563	-181	2382
	$\Omega$	2563	-219	2344
$\overline{3}_A$	$D_s$	2563	-181	2382
$6_A - \overline{3}_A$	$D (6_A - \overline{3}_A)$	2404; 2722	-165; -235	2239; 2487

**Табела 8.1(д).** Бројне вредности маса тетракваркова (у MeV) које одговарају слици 8.1(д).

мултиплет	тетракварк	$m_{v,0}$ (MeV)	$m_{v,FB}$ (MeV)	$m_v$ (MeV)
	$\Xi$	2701	-75	2626
	$\Sigma_s$	2525	-92	2433
	$\Delta$	2349	-98	2251
	$\Sigma$	2525	-47	2478
$\overline{15}_s - \overline{3}_s$	$D_s (\overline{15}_s - \overline{3}_s)$	2525; 2877	-92; -44	2433; 2833
	$D (\overline{15}_s - \overline{3}_s)$	2349; 2701	-98; -27	2251; 2674
$6_A$	$\Sigma_s$	2525	-208	2317
	$\Omega$	2525	-276	2249
$\overline{3}_A$	$D_s$	2525	-208	2317
$6_A - \overline{3}_A$	$D (6_A - \overline{3}_A)$	2349; 2701	-189; -295	2160; 2406

**Табела 8.1(ђ).** Бројне вредности маса тетракваркова (у MeV) које одговарају слици 8.1(ђ).

мултиплет	тетракварк	$m_{v,0}$ (MeV)	$m_{v,FB}$ (MeV)	$m_v$ (MeV)
	$\Xi$	2698	-67	2631
	$\Sigma_s$	2504	-85	2419
	$\Delta$	2310	-91	2219
	$\Sigma$	2504	-40	2464
$\overline{15}_s - \overline{3}_s$	$D_s (\overline{15}_s - \overline{3}_s)$	2504; 2892	-85; -38	2419; 2854
	$D (\overline{15}_s - \overline{3}_s)$	2310; 2698	-91; -22	2219; 2676
$6_A$	$\Sigma_s$	2504	-187	2317
	$\Omega$	2504	-254	2250
$\overline{3}_A$	$D_s$	2504	-187	2317
$6_A - \overline{3}_A$	$D (6_A - \overline{3}_A)$	2310; 2698	-168; -273	2142; 2425

## 8.2. Масени спектар са Глозман-Рискином интеракцијом

У табели 8.2 дати су изрази за масе свих 27 тетракваркова са утицајем Глозман-Рискине хиперфине интеракције (Borka Jovanović 2007a, 2007c, 2008a).

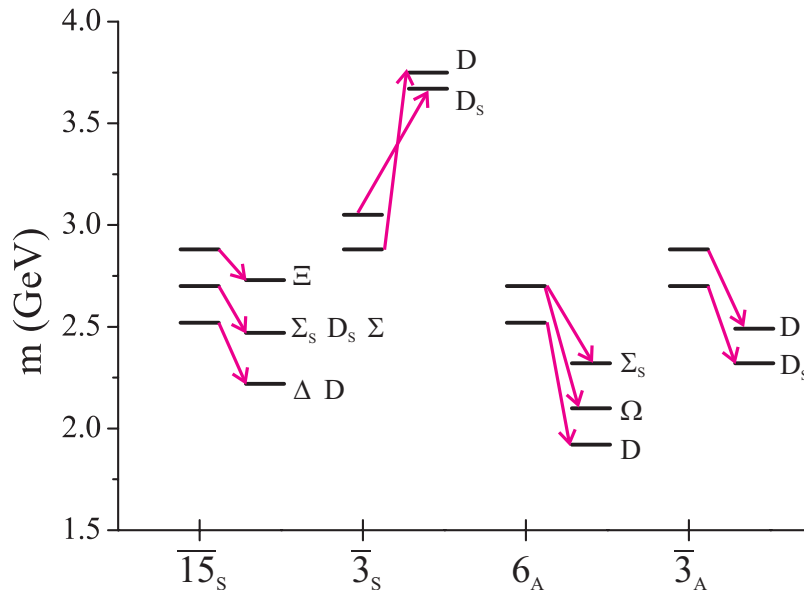
**Табела 8.2.** Масе скаларних  $cq\bar{q}\bar{q}$  тетракваркова распоређених по  $SU(3)_F$  мултиплетима, са мешањем између стања са истим квантним бројевима.  $m_{v,0}$  су масе тетракваркова без утицаја ГР ХФИ и  $m_{v,GR}$  су ГР ХФИ доприноси масама тетракваркова.

тетракварк	$m_{v,0}$	$m_{v,GR}$ ( $m_u = m_d$ )
мултиплет $\bar{15}_S$		
$\Xi$	$m_u + 2m_s + m_c$	$-\frac{4}{3}C_\chi \left( \frac{2}{m_s^2} + \frac{1}{m_u m_s} \right)$
$\Sigma_s$	$2m_u + m_s + m_c$	$-\frac{4}{3}C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u m_s} \right)$
$\Delta$	$3m_u + m_c$	$-4C_\chi \frac{1}{m_u^2}$
$\Sigma$	$2m_u + m_s + m_c$	$-\frac{4}{3}C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u m_s} \right)$
мешање $\bar{15}_S - \bar{3}_S$		
$D_s (\bar{15}_S - \bar{3}_S)$	$2m_u + m_s + m_c; 3m_s + m_c$	$-\frac{4}{3}C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u m_s} \right); 4C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s^2} + \frac{1}{m_u m_s} \right)$
$D (\bar{15}_S - \bar{3}_S)$	$3m_u + m_c; m_u + 2m_s + m_c$	$-4C_\chi \frac{1}{m_u^2}; \frac{C_\chi}{6} \left( \frac{69}{m_u^2} + \frac{4}{m_s^2} - \frac{1}{m_u m_s} \right)$
мултиплет $6_A$		
$\Sigma_s$	$2m_u + m_s + m_c$	$-8C_\chi \frac{1}{m_u m_s}$
$\Omega$	$2m_u + m_s + m_c$	$-8C_\chi \frac{1}{m_u^2}$
мултиплет $\bar{3}_A$		
$D_s$	$2m_u + m_s + m_c$	$-8C_\chi \frac{1}{m_u m_s}$
мешање $6_A - \bar{3}_A$		
$D (6_A - \bar{3}_A)$	$3m_u + m_c; m_u + 2m_s + m_c$	$-8C_\chi \frac{1}{m_u^2}; -8C_\chi \frac{1}{m_u m_s}$

Допринос ГР ХФИ масама је позитиван или негативан у зависности од знакова производа  $\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j$  и  $\lambda_i \lambda_j$ . Негативан (тј. смањује масе тетракваркова) је у мултиплетима  $\bar{15}_S$ ,  $6_A$  и  $\bar{3}_A$ , а код  $\bar{15}_S - 3_S$  мешаних стања једно од мешаних стања има негативан а друго има позитиван допринос ГР (Borka Jovanović 2007a, 2007c, 2008a). Позитиван допринос за два мешана стања (једно од два  $D_s$  стања и једно од два  $D$  стања) произилази због саме појаве мешања: мешање стања мења својства и помера масе у односу на теоријска предвиђања.

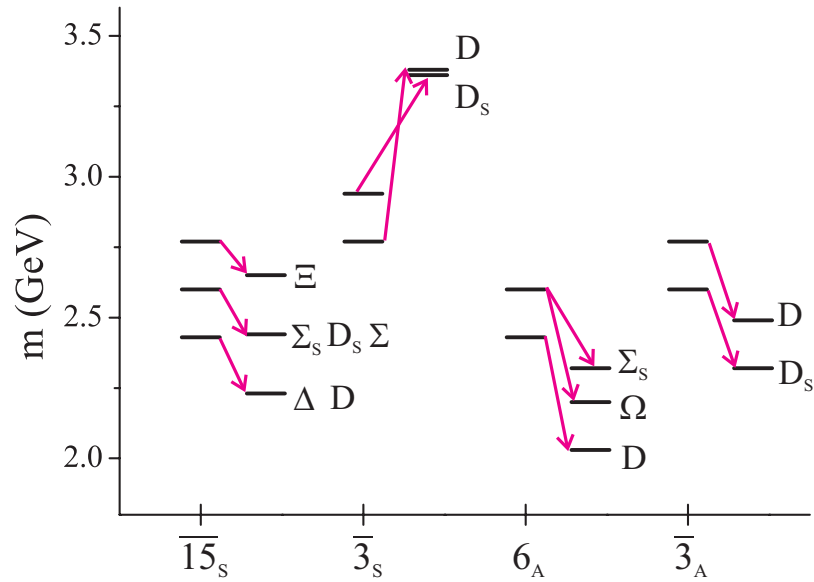
Неколико примера масених спектра тетракваркова са утицајем ГР ХФИ дати су на сликама 8.2(а)-(в). Бројне вредности маса тетракваркова које одговарају овим сликама дате су у табелама 8.2(а)-(в). Спектре тетракваркова смо рачунали на основу табеле 8.2, из бројних вредности конститутивних кваркова добијених из фита маса хадрона. Стрелице на графицима показују промену маса када се урачуна утицај Глозман-Рискине хиперфине интеракције. Видимо да је ГР ХФИ узрок раздвајања између стања  $\Sigma_s$  и  $\Omega$  у мултиплету  $6_A$ .

Вредности слободних параметара ( $m_{u,d}$ ,  $m_s$ ,  $m_c$ ,  $C_\chi$ ) добијене фитом експерименталних маса мезона и бариона користимо за израчунавање маса тетракваркова. У случају лаких мезона и бариона, пошто маса  $c$ -кварка није садржана у њиховим масама,  $m_c$  се додаје као "спољни" параметар тако да маса стања  $D_s(2317)$  буде најприближнија мереној маси од 2317 MeV. Може, на пример, и константа  $C_\chi$  да се дода као спољни параметар на исти начин: из фита хадрона који садрже  $c$ -кварк израчунавамо масу  $m_c$  али константу добијамо тако да маса најнижег стања из мешања  $6_A - \bar{3}_A$  буде иста као експериментална маса  $D_s^+(2317)$  (видети слику 8.2(а)).

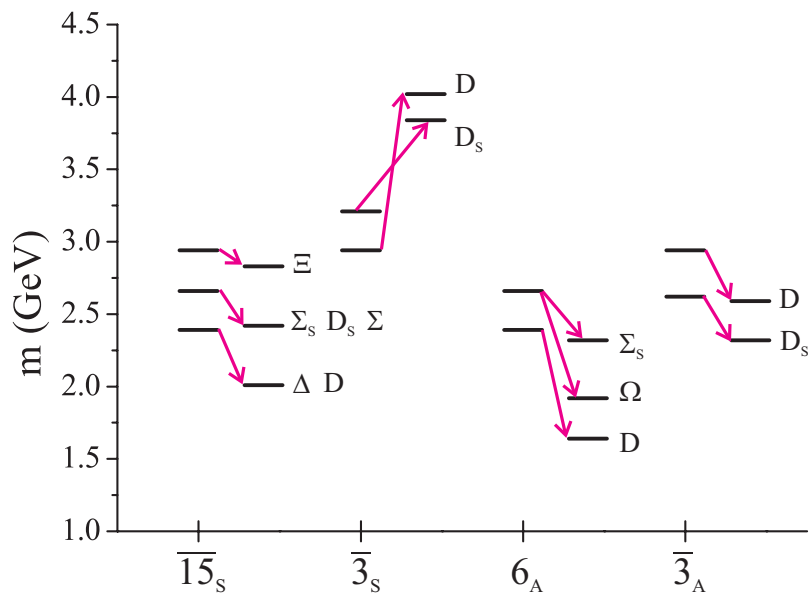


**Слика 8.2(а).** Масени спектар тетракваркова без (лева колона) и са (десна колона) ГР ХФИ, обе са  $SU(3)_F$  нарушењем симетрије. Спектар је добијен из фита мезона, без мешаних стања  $\eta$ - $\eta'$  и  $\omega$ - $\phi$ ,  $m_u = 311$  MeV,  $m_s = 487$  MeV,  $m_c = 1592$  MeV. За вредност константе узето је  $C_\chi = 0,73 \cdot 10^7$  MeV<sup>3</sup>.





**Слика 8.2(б).** Масени спектар добијен из фита бариона  $m_u = 388 \text{ MeV}$ ,  $m_s = 556 \text{ MeV}$ ,  $m_c = 1267 \text{ MeV}$ . За вредност константе узето је  $C_\chi = 0,76 \cdot 10^7 \text{ MeV}^3$ .



**Слика 8.2(в).** Масени спектар добијен из фита лаких мезона  $m_u = 237 \text{ MeV}$ ,  $m_s = 512 \text{ MeV}$ ,  $C_\chi = 0,524 \cdot 10^7 \text{ MeV}^3$ . За вредност масе  $c$  кварка узето је  $m_c = 1676 \text{ MeV}$ .

**Табела 8.2(а).** Бројне вредности маса скаларних  $sq\bar{q}\bar{q}$  тетракваркова (у MeV) распоређених по  $SU(3)_F$  мултиплетима, са мешањем између стања са истим квантним бројевима.  $m_{v,0}$  су масе тетракваркова без утицаја ГР ХФИ,  $m_{v,GR}$  су ГР ХФИ доприноси масама тетракваркова и  $m_v$  су укупне масе тетракваркова. Бројне вредности одговарају слици 8.2(а).

мултиплет	тетракварк	$m_{v,0}$ (MeV)	$m_{v,GR}$ (MeV)	$m_v$ (MeV)
	$\Xi$	2877	-146	2731
	$\Sigma_s$	2701	-229	2472
	$\Delta$	2525	-302	2223
	$\Sigma$	2701	-229	2472
$\bar{15}_s - \bar{3}_s$	$D_s (\bar{15}_s - \bar{3}_s)$	2701; 3053	-229; 618	2472; 3671
	$D (\bar{15}_s - \bar{3}_s)$	2525; 2877	-302; 880	2223; 3757
$6_A$	$\Sigma_s$	2701	-386	2315
	$\Omega$	2701	-604	2097
$\bar{3}_A$	$D_s$	2701	-386	2315
$6_A - \bar{3}_A$	$D (6_A - \bar{3}_A)$	2525; 2877	-604; -386	1921; 2491

**Табела 8.2(б).** Бројне вредности маса тетракваркова (у MeV) које одговарају слици 8.2(б).

мултиплет	тетракварк	$m_{v,0}$ (MeV)	$m_{v,GR}$ (MeV)	$m_v$ (MeV)
	$\Xi$	2767	-113	2654
	$\Sigma_s$	2599	-161	2438
	$\Delta$	2431	-202	2229
	$\Sigma$	2599	-161	2438
$\bar{15}_s - \bar{3}_s$	$D_s (\bar{15}_s - \bar{3}_s)$	2599; 2935	-161; 441	2438; 3376
	$D (\bar{15}_s - \bar{3}_s)$	2430; 2767	-202; 591	2229; 3358
$6_A$	$\Sigma_s$	2599	-282	2317
	$\Omega$	2599	-404	2195
$\bar{3}_A$	$D_s$	2599	-282	2317
$6_A - \bar{3}_A$	$D (6_A - \bar{3}_A)$	2431; 2767	-404; -282	2027; 2485

**Табела 8.2(в).** Бројне вредности маса тетракваркова (у MeV) које одговарају слици 8.2(в).

мултиплет	тетракварк	$m_{v,0}$ (MeV)	$m_{v,GR}$ (MeV)	$m_v$ (MeV)
	$\Xi$	2937	-111	2826
	$\Sigma_s$	2662	-240	2422
	$\Delta$	2387	-373	2014
	$\Sigma$	2662	-240	2422
$\overline{15}_s - \overline{3}_s$	$D_s (\overline{15}_s - \overline{3}_s)$	2662; 3212	-240; 626	2422; 3838
	$D (\overline{15}_s - \overline{3}_s)$	2387; 2937	-373; 1079	2014; 4016
$6_A$	$\Sigma_s$	2662	-345	2317
	$\Omega$	2662	-746	1916
$\overline{3}_A$	$D_s$	2662	-345	2317
$6_A - \overline{3}_A$	$D (6_A - \overline{3}_A)$	2387; 2937	-746; -345	1641; 2592

Ради прегледности, из датих табела издвојимо вредности за масе стања која одговарају експериментално нађеним стањима  $D_s^+(2317)$ ,  $D^0(2308)$  и  $D_s^+(2632)$  (о тим стањима детаљније у поглављу 10). Прикажимо у табелама 8.2(г) и 8.2(д) њихове бројне вредности добијене са ФБ и ГР ХФИ.

**Табела 8.2(г).** Преглед израчунатих вредности маса стања (у MeV) које одговарају експериментално нађеним стањима  $D_s^+(2317)$ ,  $D^0(2308)$  и  $D_s^+(2632)$ , са ФБ ХФИ.

табела	$D_s^+(2317)$	$D_s^+(2632)$	$D^0(2308)$
8.1(а)	2318	2456; 2690	2229; 2359
8.1(б)	2317	2430; 2815	2165; 2404
8.1(в)	2524	2626; 3066	2346; 2629
8.1(г)	2382	2490; 2838	2239; 2487
8.1(д)	2317	2433; 2833	2160; 2406
8.1(ђ)	2317	2419; 2854	2142; 2425

**Табела 8.2(д).** Преглед израчунатих вредности маса стања (у MeV) које одговарају експериментално нађеним стањима  $D_s^+(2317)$ ,  $D^0(2308)$  и  $D_s^+(2632)$ , са ГР ХФИ.

табела	$D_s^+(2317)$	$D_s^+(2632)$	$D^0(2308)$
8.2(а)	2315	2472; 3671	1921; 2491
8.2(б)	2317	2438; 3376	2027; 2485
8.2(в)	2317	2422; 3838	1641; 2592

### 8.3. Поређење спектра

У овом одељку приказани су вредности маса и масени спектри, са мешањем честица са истим квантним бројевима. Утврђен је облик спектра тетракваркова. Са променом слободних параметара ( $m_{u,d}$ ,  $m_s$ ,  $m_c$ ,  $C$ ), спектар задржава увек исти облик (распоред честица), могућа су само одступања у том смислу да се цео спектар помера ка вишим или нижим енергијама или је могуће повећање (и смањивање) растојања између линија спектра.

Видимо да хиперфине интеракције одређују раздвајање маса у спектру, тј. фину структуру спектра. Мешање стања код обе интеракције доводи до раздвајања стања. Када поредимо ове две интеракције, видимо да у спектру тетракваркова постоји разлика код мешаних стања из  $\overline{15}_s - 3_s$ , али је облик спектра сличан. Поред тога, ФБ ХФИ узрокује додатно раздвајање између  $\Sigma_s (D_s)$  и  $\Sigma$ . Ове разлике потичу од чланова ( $\lambda_i^F \lambda_j^F$ ) у ФБ и ( $\lambda_i^C \lambda_j^C$ ) у ГР интеракцији. Важно је истаћи сличност спектра мада је једна интеракција колор-спин а друга је флејвор-спин. Поређењем графика може да се уочи да ГР ХФИ смањује масе више него што је то у случају ФБ ХФИ, али та разлика није велика.

Поређењем спектра тетракваркова може да се закључи да су облици спектра са ФБ и ГР ХФИ слични, једино су померени за неку вредност. Ово је важан резултат који није био очекиван јер је Ферми-Брајтова боја-спин интеракција, а Глозман-Рискина је аромат-спин интеракција. Резултати добијени из ове две интеракције потврђују да обе ХФИ дају сличне вредности за масе тетракваркова.

## 9. МАСЕНИ СПЕКТАР СКАЛАРНОГ НОНЕТА $qq\bar{q}\bar{q}$

Тетракваркну структуру лаког скаларног нонета  $qq\bar{q}\bar{q}$  ( $q = u, d, s$ ) предложио је Џефи (Jaffe 1977a). Више аутора је проучавало могућност да су ова стања тетракваркови (Brito *et al.* 2005, Alford & Jaffe 2000, Close & Törnkvist 2002, 't Hooft *et al.* 2008). Вијанде и сарадници (Vijande *et al.* 2005) дали су претпоставку да  $qq\bar{q}\bar{q}$  нонет представља мешавину двокваркне и четворокваркне компоненте. У овој дисертацији разматрали смо поменута стања као тетракваркове и израчунали њихове масе са утицајем Глозман-Рискине хиперфине интеракције.

У групи  $SU(3)_F$ , према производу:

$$3 \otimes 3 \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = (15 + 3 + \bar{6} + 3) \otimes \bar{3} = (27 + 10 + 8) + (8 + 1) + (\bar{10} + 8) + (8 + 1), \quad (9a)$$

постоји укупно 81 тетракваркно стање. Ароматска декомпозиција свих 81 стања, у групи  $SU(3)$ , дата је на сликама 9(a) и 9(b).

Ми разматрамо нонет, који се састоји од једног синглета и једног октета:

$$3 \otimes 3 \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = 8 + 1 + \dots \quad (9b)$$

У том нонету су следећих 9 стања:  $\sigma$  (500),  $f_0$ (980),  $\kappa^+$ (800),  $\kappa^0$ (800),  $\bar{\kappa}^0$ (800),  $\kappa^-$ (800),  $a_0^+$ (980),  $a_0^0$ (980) и  $a_0^-$ (980). Тежински дијаграм за лаки скаларни нонет дат је на слици 9(b).

У поглављу 5.2 показали смо како се рачунају производи Гел-Манових матрица за аромат у случају  $c_1 q_2 \bar{q}_3 \bar{q}_4$ , у  $SU(3)$  групи. У том случају рачунали смо комбинације за  $\lambda_i \lambda_j$  у систему  $q_2 \bar{q}_3 \bar{q}_4$ , тј. важило је  $i, j = 2, 3, 4$  (јер не постоји аромат за  $c$  кварк у  $SU(3)$  групи). Међутим, за тетракваркове  $q_1 q_2 \bar{q}_3 \bar{q}_4$  (при чему је сваки од кваркова лаки кварк :  $q = u, d, s$ ), рачунају се  $\lambda_i \lambda_j$  комбинације од по 2 кварка за  $i, j = 1, 2, 3, 4$  у  $SU(3)$  групи. Производе  $\sigma_i \sigma_j$  рачунамо исто као што је објашњено у поглављу 5.1, јер је опет у питању скаларни систем од два кварка и два антикварка.

$$\begin{aligned} (3 \otimes 3 \otimes \bar{3}) \otimes \bar{3} &= (\square \otimes \square \otimes \square) \otimes \square = ((\square + \square) \otimes \square) \otimes \square \\ &= (\square + \square + \square + \square) \otimes \square \\ &= (\square + \square + \square + \square) \otimes \square \end{aligned}$$

**Слика 9(a).** Јангови дијаграми за  $SU(3)_F$  мултиплете према  $(3 \otimes 3 \otimes \bar{3}) \otimes \bar{3} = (15 + 3 + 3 + \bar{6}) \otimes \bar{3}$ . Из другог и трећег реда ове слике може да се види да дијаграми који се разликују за лево поравнате колоне од три квадратића (који су прецртани) означавају исту редуцибилну репрезентацију.

$$Y = \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right) + \left( \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right) + \left( \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right) + \left( \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right)$$

$$Y_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

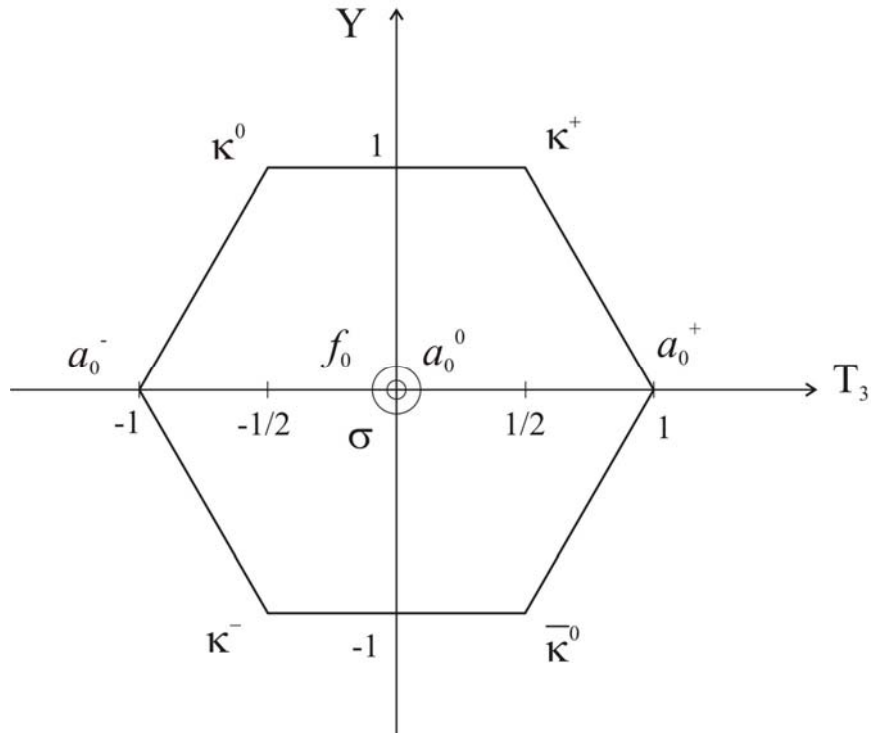
$$Y_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

$$Y_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

$$Y_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

**Слика 9(б).** Јангови дијаграми за  $SU(3)_F$  мултиплете према  $3 \otimes 3 \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = (15 \otimes \bar{3}) + (3 \otimes \bar{3}) + (3 \otimes \bar{3}) + (\bar{6} \otimes \bar{3}) = (27 + 10 + 8) + (8 + 1) + (\bar{10} + 8) + (8 + 1)$ .

Тетракваркови са кваркним садржајем  $qq\bar{q}\bar{q}$  формирају следеће мултиплете: један 27-плет, декуплет, анти-декуплет, четири октета и два синглета.



**Слика 9(в).** Тежински дијаграм за скаларни нонет. Ордината показује хипернабој  $Y$ , а апсциса трећу компоненту  $T_3$  магнитуде изотопског спина.

Тетракваркови (укупно 4 кварка) су бозони, тј. имају целобројан спин (скаларни имају  $S = 0$ ). У  $SU(3)$  групи симетричност укупне таласне функције одређујемо као да су фермиони јер  $SU(3)$  групу чине 3 кварка:  $u, d, s$ . Пошто је таласна функција боје за све хадроне антисиметрична (хадрони су безбојни), таласне функције спина и аромата морају да имају исту симетрију да би укупна таласна функција била антисиметрична ( $\Psi_A = \varphi \zeta_A \chi_S \nu_S$  или  $\Psi_A = \varphi \zeta_A \chi_A \nu_A$ ).

Из разлагања производа  $3 \otimes 3 \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = 8 + 1 + \dots$  видимо да постоје два нонета:  $9 = 8 + 1$ . Октети имају мешану симетрију (само у односу на измену првог пара кваркова). Да би били међусобно ортогонални, један октет је мешано симетричан (МС), а други је мешано антисиметричан (МА) у погледу ароматске таласне функције. То значи да за рачун  $(\lambda_i \lambda_j)(\sigma_i \sigma_j)$  код честица МС октета користимо  $\chi_S$ , а код МА користимо  $\chi_A$ .

Показаћемо како се парови кварк-кварк, кварк-антикварк и антикварк-антикварк распоређују у  $SU(3)_F$  мултиплете:

1.  $q_1 q_2$

Два кварка могу да буду или из мултиплета  $\bar{3}$  или из мултиплета 6.

$$3 \otimes 3 = \bar{3} + 6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \bar{3} | \lambda_1 \lambda_2 | \bar{3} \rangle = -\frac{8}{3} \\ \langle 6 | \lambda_1 \lambda_2 | 6 \rangle = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

чланови мултиплета  $\bar{3}$  су:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du), \frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd), \frac{1}{\sqrt{2}}(su - us)$

чланови мултиплета 6 су:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du), \frac{1}{\sqrt{2}}(ds + sd), \frac{1}{\sqrt{2}}(su + us), uu, dd, ss$ .

2.  $q_1 \bar{q}_3, q_1 \bar{q}_4, q_2 \bar{q}_3, q_2 \bar{q}_4$

Кварк и антикварк могу да буду или из мултиплета 8 или из синглета 1.

$$3 \otimes \bar{3} = 1 + 8 \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle 8 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 8 \rangle = \frac{2}{3} \\ \langle 1 | \lambda_2 \bar{\lambda}_3 | 1 \rangle = -\frac{16}{3} \end{array} \right.$$

члан мултиплета 1 је:  $\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$

чланови мултиплета 8 су:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{d} + \bar{d}u), \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{s} + \bar{s}d), \frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{u} + \bar{u}s), \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}),$   
 $\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}), \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{u} + \bar{u}d), \frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{d} + \bar{d}s), \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{s} + \bar{s}u).$

3.  $\bar{q}_3 \bar{q}_4$

Два антикварка могу да буду или из мултиплета 3 или из мултиплета  $\bar{6}$ .

$$\bar{3} \otimes \bar{3} = 3 + \bar{6} \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle 3 | \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 | 3 \rangle = -\frac{8}{3} \\ \langle \bar{6} | \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 | \bar{6} \rangle = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{чланови } 3 \text{ су: } \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{d} - \bar{d}\bar{u}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}\bar{s} - \bar{s}\bar{d}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{s}\bar{u} - \bar{u}\bar{s})$$

$$\text{чланови } \bar{6} \text{ су: } \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{d} + \bar{d}\bar{u}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}\bar{s} + \bar{s}\bar{d}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{s}\bar{u} + \bar{u}\bar{s}), \bar{u}\bar{u}, \bar{d}\bar{d}, \bar{s}\bar{s}.$$

Ако напишемо ароматске таласне функције (Jaffe 1977a, Brito *et al.* 2005):

$$|\sigma\rangle = |ud\bar{u}\bar{d}\rangle,$$

$$|f_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|us\bar{u}\bar{s} + ds\bar{d}\bar{s}\rangle,$$

$$|a_0^+\rangle = |us\bar{d}\bar{s}\rangle, |a_0^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|us\bar{u}\bar{s} - ds\bar{d}\bar{s}\rangle, |a_0^-\rangle = |ds\bar{u}\bar{s}\rangle,$$

$$|\kappa^+\rangle = |udd\bar{s}\rangle, |\kappa^0\rangle = |ud\bar{u}\bar{s}\rangle, |\bar{\kappa}^0\rangle = |us\bar{u}\bar{d}\rangle, |\kappa^-\rangle = |ds\bar{u}\bar{d}\rangle,$$

можемо да раздвојимо њихове парове:  $q_1 q_2$ ,  $q_i \bar{q}_j$  и  $\bar{q}_3 \bar{q}_4$ , као што је приказано у табели 9(a).

**Табела 9а.** Делови ароматских таласних функција за лаки скаларни нонет  $q_1 q_2 \bar{q}_3 \bar{q}_4$  за одређену комбинацију кваркова.

	$q_i q_j$	$\sigma$	$f_0$	$a_0^+$	$a_0^0$	$a_0^-$	$\kappa^+$	$\kappa^0$	$\bar{\kappa}^0$	$\kappa^-$
два кварка	$q_1 q_2$	$ud$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(us + ds)$	$us$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(us - ds)$	$ds$	$ud$	$ud$	$us$	$ds$
кварк и антикварк	$q_1 \bar{q}_3$	$u\bar{u}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$	$u\bar{d}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	$d\bar{u}$	$u\bar{d}$	$u\bar{u}$	$u\bar{u}$	$d\bar{u}$
	$q_1 \bar{q}_4$	$u\bar{d}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{s} + d\bar{s})$	$u\bar{s}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{s} - d\bar{s})$	$d\bar{s}$	$u\bar{d}$	$u\bar{s}$	$u\bar{d}$	$d\bar{d}$
	$q_2 \bar{q}_3$	$d\bar{u}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{u} + s\bar{d})$	$s\bar{d}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{u} - s\bar{d})$	$s\bar{u}$	$d\bar{d}$	$d\bar{u}$	$s\bar{u}$	$s\bar{u}$
	$q_2 \bar{q}_4$	$d\bar{d}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{s} + s\bar{s})$	$s\bar{s}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{s} - s\bar{s})$	$s\bar{s}$	$d\bar{s}$	$u\bar{s}$	$s\bar{d}$	$s\bar{d}$
два антикварка	$\bar{q}_3 \bar{q}_4$	$\bar{u}\bar{d}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{s} + \bar{d}\bar{s})$	$\bar{d}\bar{s}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{s} - \bar{d}\bar{s})$	$\bar{u}\bar{s}$	$\bar{d}\bar{s}$	$\bar{u}\bar{s}$	$\bar{u}\bar{d}$	$\bar{u}\bar{d}$



Када се делови ароматских функција (тј. сабирци) из табеле 9.1 упореде са функцијама чланова мултиплета  $\bar{3}$ , 6, 3,  $\bar{6}$ , 1 и 8, може да се види која  $q_i q_j$  комбинација одговара којој репрезентацији. На основу тога рачунамо производ  $\langle R | \lambda_i \lambda_j | R \rangle$ , где је  $R$  репрезентација.

На пример за честицу  $f_0$ , у случају пара кваркова  $q_1 q_2$  видимо да се сабирци  $us$  и  $ds$  налазе у оба мултиплета из производа  $3 \otimes 3$ . Резултат није изненађујући јер ова честица има и МС и МА део ароматске таласне функције. Онда закључујемо да МС део припада мултиплету 6, а МА део припада  $\bar{3}$ . Тада, при рачунању производа  $\lambda_1 \lambda_2$ , за МС део рачунамо матрични елемент  $\langle 6 | \lambda_1 \lambda_2 | 6 \rangle$  док за МА део рачунамо  $\langle \bar{3} | \lambda_1 \lambda_2 | \bar{3} \rangle$ .

Тако добијамо производе  $\lambda_i \lambda_j$  за парове кварк-кварк, кварк-антикварк и антикварк-антикварк:

1. кварк-кварк

$$\text{МС: } \lambda_1 \lambda_2 = \langle 6 | \lambda_1 \lambda_2 | 6 \rangle = \frac{4}{3}$$

$$\text{МА: } \lambda_1 \lambda_2 = \langle \bar{3} | \lambda_1 \lambda_2 | \bar{3} \rangle = -\frac{8}{3}$$

2. кварк-антикварк

$$\text{МС: } \lambda_1 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4 = \langle 8 | \lambda_1 \lambda_3 | 8 \rangle = \frac{2}{3}$$

$$\text{МА: } \lambda_1 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4 = \langle 8 | \lambda_1 \lambda_3 | 8 \rangle = \frac{2}{3}$$

3. антикварк-антикварк

$$\text{МС: } \lambda_3 \lambda_4 = \langle \bar{6} | \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 | \bar{6} \rangle = \frac{4}{3}$$

$$\text{МА: } \lambda_3 \lambda_4 = \langle 3 | \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_4 | 3 \rangle = -\frac{8}{3}$$

**Табела 9б.** Производи  $\lambda_i \lambda_j$  (Гел-Манове матрице за аромат) и  $\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j$  (Паулијеве спинске матрице) за МС и МА мултиплете:  $\delta_{\text{МС}}$ ,  $\delta_{\text{МА}}$  и  $1_{\text{МС}}$ ,  $1_{\text{МА}}$ .

симетрија	$q_i q_j$	$q_i \bar{q}_j$	$\bar{q}_i \bar{q}_j$
МС	$\lambda_1 \lambda_2 = 4/3$	$\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4 = 2/3$	$\lambda_3 \lambda_4 = 4/3$
	$\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 = 1$	$\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_4 = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_4 = -2$	$\bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_4 = 1$
МА	$\lambda_1 \lambda_2 = -8/3$	$\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4 = 2/3$	$\lambda_3 \lambda_4 = -8/3$
	$\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 = -3$	$\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_4 = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_4 = 0$	$\bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_4 = -3$

Производи  $\lambda_i \lambda_j$  и  $\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j$  за МС и МА мултиплете дати су у табели 9(б). Масе са утицајем ГР ХФИ рачунамо на основу формула (5.2в) и (5.2г), само што у овом случају индекс за сумирање не иде од 2, већ од 1. ГР ХФИ допринос масама лаких тетракваркова је:

$$m_{v,GR} = -C_\chi \langle v \uparrow | \frac{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2}{m_1 m_2} (\lambda_1 \lambda_2) - \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 (\lambda_1 \lambda_3) \left( \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{1}{m_2 m_3} + \frac{1}{m_1 m_4} + \frac{1}{m_2 m_4} \right) + \frac{\bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_4}{m_3 m_4} (\lambda_3 \lambda_4) | v \uparrow \rangle, \quad (9в)$$

где  $v$  уврштавамо коришћењем следеће једнакости:  $|v \uparrow \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |v_{MA} + v_{MS} \rangle$ .

Кад се убаце бројне вредности за  $\lambda_i \lambda_j$  и  $\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j$  у једначину (9в), добијају се следећи изрази за ГР ХФИ допринос масама код симетричних и антисиметричних мултиплета:

$$\begin{aligned} \text{МС: } m_{v,GR,MS} &= -\frac{4}{3} C_\chi \langle v_{MS} | \frac{1}{m_1 m_2} + \left( \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{1}{m_2 m_3} + \frac{1}{m_1 m_4} + \frac{1}{m_2 m_4} \right) + \frac{1}{m_3 m_4} | v_{MS} \rangle, \\ \text{МА: } m_{v,GR,MA} &= -8 C_\chi \langle v_{MA} | \frac{1}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_3 m_4} | v_{MA} \rangle. \end{aligned} \quad (9г)$$

Укупан ГР ХФИ допринос масама има следећи облик:

$$m_{v,GR} = \frac{1}{2} (m_{v,GR,MS} + m_{v,GR,MA}), \quad (9д)$$

па тако из једначина (9г) и (9д) добијамо:

$$\begin{aligned} m_{v,GR} &= -2 C_\chi \left( \frac{1}{3} \langle v_{MS} | \frac{1}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{1}{m_2 m_3} + \frac{1}{m_1 m_4} + \frac{1}{m_2 m_4} + \frac{1}{m_3 m_4} | v_{MS} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + 2 \langle v_{MA} | \frac{1}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_3 m_4} | v_{MA} \rangle \right). \end{aligned} \quad (9ђ)$$

Узимајући у обзир облик ароматских таласних функција  $v$ , коначно добијамо:

$$m_{v,GR} = -\frac{2}{3} C_\chi \left( \frac{7}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{1}{m_2 m_3} + \frac{1}{m_1 m_4} + \frac{1}{m_2 m_4} + \frac{7}{m_3 m_4} \right). \quad (9е)$$

У овој дисертацији смо дали детаљан метод (Borka Jovanović & Ignjatović 2009, 2010) како се рачунају теоријске масе лаког нонета тетракваркова. Од укупно 81 стања, рачунамо масе за следећих 9 стања: једно стање  $\sigma(500)$ , једно стање  $f_0(980)$ , 3 стања  $a_0(980)$  и 4 стања  $\kappa(800)$ . Њихове масе, са утицајем ГР ХФИ су следеће (Borka Jovanović 2007a, Borka Jovanović & Ignjatović 2010):

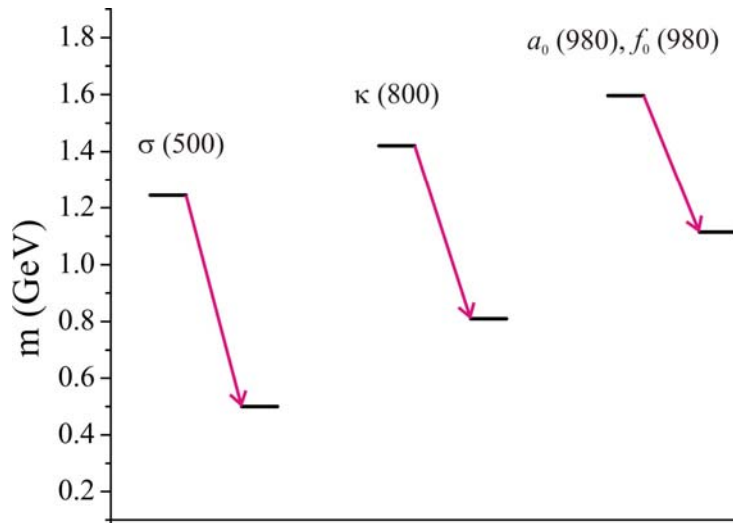
$$m_\sigma = 4m_u - 12 C_\chi \frac{1}{m_u^2},$$

$$m_{f_0} = 2m_u + 2m_s - \frac{2}{3}C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_s^2} + \frac{16}{m_u m_s} \right),$$

$$m_{a_0} = m_{f_0},$$

$$m_\kappa = 3m_u + m_s - 6C_\chi \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{1}{m_u m_s} \right).$$

На основу  $\chi^2$  фита маса мезона (за детаље видети поглавље 8.2) израчунали смо бројне вредности маса кваркова  $u$ ,  $d$ ,  $s$ . Константа  $C_\chi$  је додата као спољни параметар тако да теоријска маса најлакшег стања  $\sigma$  буде иста као његова експериментална маса. На тај начин смо добили бројне вредности за масе овог нонета и на слици 9(a) приказали спектар са утицајем ГР ХФИ. Видимо да ова хиперфина интеракција значајно смањује теоријске вредности маса и приближава их њиховим експерименталним вредностима. Ова чињеница потврђује закључак из рада Брита и сарадника (Brito *et al.* 2005) о тетракваркној природи ових лаких скалара.



**Слика 9(a).** Масени спектар лаког нонета тетракваркова без (лева колона) и са (десна колона) ГР ХФИ, обе са нарушењем симетрије  $SU(3)_F$ . Спектар је добијен из фита мезона, без мешаних стања  $\eta$ - $\eta'$  и  $\omega$ - $\phi$ ,  $m_u = 311$  MeV,  $m_s = 487$  MeV. За вредност константе узето је  $C_\chi = 0,6 \cdot 10^7$  MeV<sup>3</sup>.

## 10. СТАЊА $D_s^+(2317)$ , $D^0(2308)$ И $D_s^+(2632)$

### 10.1 Откриће стања $D_s^+(2317)$ , $D^0(2308)$ и $D_s^+(2632)$

Мезон  $D_s^+(2317)$  је откривен 2003. г., у истраживачком центру за физику елементарних честица *SLAC* (*Stanford Linear Accelerator Center*) у Калифорнији, у електронско-позитронским високо енергетским сударима. Ова честица има масу од 2,317 GeV, што је неких 170 MeV мање него што је то очекивано на основу тада преовлађујућих теорија интеракције кваркова. Било је потребно дати ново објашњење како  $c$ -кварк заједно са  $\bar{s}$ -кварком даје баш ову масу. Уопштено,  $D_s$  and  $D$  мезони чине групу честица код којих је  $c$ -кварк додат на лаки антикварк (индекс  $s$  код  $D_s$  означава страни антикварк, док  $D$  мезони имају само "шармантни" кварк и "доњи" антикварк). Група *BABAR* (Aubert *et al.* 2003) дала је предлог да би честица  $D_s^+(2317)$  могла да буде нова честица састављена од 4 кварка. Група физичара из Португалије, претпостављајући да је овај мезон заиста  $c\bar{s}$  комбинација, показује у свом моделу да је дата маса очекивана ако се узму у обзир јаке интеракције одговорне за стварање и анихилацију додатних кварк-антикварк парова (van Beveren & Rupp 2003a,b). Колаборација *BELLE* (Mikami *et al.* 2004) потврдила је постојање ове честице. У "*SELEX*" експериментима (Evdokimov *et al.* 2004) откривено је стање  $D_s^+(2632)$  које се није уклапало у ранија теоријска предвиђања јер је преласко да би било (радијално) побуђено стање  $D_s^+(2317)$ . Група *BELLE* (Abe *et al.* 2004) открила је стање  $D^0(2308)$ . Маса овог мезона такође се није уклапала у дотадашњу теорију класичних мезона јер се очекивало да разлика маса  $D_s^+(2317)$  и  $D^0(2308)$  буде много већа од 9 MeV, пошто  $D_s^+(2317)$  садржи антистрани кварк а  $D^0(2308)$  не садржи ни страни ни антистрани кварк.

Ова неслагања су довела до различитих теоретских предлога о могућој структури мезона  $D_s^+(2317)$ ,  $D^0(2308)$  и  $D_s^+(2632)$ . У овој дисертацији разматрана је могућност да су поменута стања тетракваркови, са две хиперфине интеракције: Ферми-Брајтовом и Глозман-Рискином.

### 10.2. Експерименти и масени спектар

Могуће је идентификовати  $D_s^+(2317)$  са најнижим стањем у спектру тетракваркова које је у мултиплету  $\bar{3}_A$ , што се слаже са претпоставком да је  $D_s^+(2317)$  тетракварк у раду Мајанија и сарадника (Maiani *et al.* 2005). Такође је могуће идентификовати  $D_s^+(2632)$  са стањем из мешања  $\bar{15}_S$  и  $\bar{3}_S$ . Израчуната разлика маса страног  $D_s^+(2317)$  и нестраног  $D^0(2308)$  тетракварка је десетак пута већа од експериментално добијене вредности – исто као да се ова стања састоје од једног  $c$  кварка и једног антикварка. Постоје два изотриплета  $\Sigma_s$  ( $\Sigma_s^{++}$ ,  $\Sigma_s^+$ ,  $\Sigma_s^0$ ): један у мултиплету  $\bar{15}_S$  и други у мултиплету  $6_A$ . Показали смо да изотриплет из  $\bar{15}_S$  има исту масу као једно од два мешана стања које вероватно

представља стање  $D_s^+(2632)$ , док изотриплет из  $6_A$  има исту масу као стање које вероватно представља стање  $D_s^+(2317)$ .

Добијени резултати показују да је  $D_s^+(2317)$  (Aubert *et al.* 2003 – BABAR Collab.) тетракваркно стање у  $SU(3)_F \bar{3}_A$  репрезентацији са следећим кваркним саставом:

$$|cq\bar{q}s\rangle = \frac{1}{2}c(d(\bar{d}s - \bar{s}d) - u(\bar{s}u - \bar{u}s))$$

Стање  $D^0(2308)$  (Abe *et al.* 2004 – BELLE Collab.) је идентификовано са стањем из мешања репрезентација  $6_A - \bar{3}_A$ :

$$|cq\bar{q}s\rangle = \frac{1}{2}c(d(\bar{u}d - \bar{d}u) + s(\bar{s}u - \bar{u}s));$$

$$|cq\bar{q}s\rangle = \frac{1}{2}c(s(\bar{s}u - \bar{u}s) - d(\bar{u}d - \bar{d}u))$$

Стање  $D_s^+(2632)$  (Evdokimov *et al.* 2004 – SELEX Collab.) је идентификовано са стањем из мешања репрезентација  $\bar{15}_s - \bar{3}_s$ :

$$|cq\bar{q}s\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}c(u(\bar{s}u + \bar{u}s) + d(\bar{d}s + \bar{s}d) - 2s\bar{s}s);$$

$$|cq\bar{q}s\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}c(u(\bar{s}u + \bar{u}s) + d(\bar{d}s + \bar{s}d) + 2s\bar{s}s)$$

Потврдили смо могућу тетракваркну природу скаларних шармантних мезона  $D_s^+(2317)$ ,  $D^0(2308)$  и  $D_s^+(2632)$  показујући постојање тетракваркне компоненте у њиховим таласним функцијама. То значи да је тетракваркни модел у складу са експериментално нађеним стањима.

## 11. АЛТЕРНАТИВНА ТУМАЧЕЊА СКАЛАРНИХ СТАЊА КОЈА САДРЖЕ $c$ -КВАРК

Постоје и друга тумачења система  $cq\bar{q}\bar{q}$  проучаваног у овој тези. У овом поглављу ћемо набројати та тумачења која се разликују од претпоставке да су дата стања тетракваркови. Међутим, напоменимо да код оваквих тумачења није узето у обзир свих 27 стања, већ су углавном разматрана само нека од експериментално потврђених стања.

У радовима (van Beveren & Rupp 2003a,b, van Beveren *et al.* 2006)  $D_s^+(2317)$  мезон је објашњен као скаларни  $c\bar{s}$  систем: претпостављајући да је овај мезон заиста шарм-антистрана комбинација, ван Беверен и сарадници објашњавају да ако се урачунају јаке интеракције одговорне за креацију и анихилацију додатних кварк-антикварк парова, маса се добија у очекиваном опсегу. По ван Беверену и Рупу (van Beveren & Rupp 2004) и Барнсу и сарадницима (Barnes *et al.* 2004), резонанца  $D_s^+(2632)$  која је 0.52 GeV тежа од  $D_s$  основног стања могла би да буде прво радијално побуђење  $D_s(2112)$  мезона.

Вијанде и сарадници (Vijande *et al.* 2006, 2007) предлажу да се ова стања разматрају као мешавина конвенционалних кварк-антикварк стања и тетракваркова: на тај начин објашњавају неочекиване мале масе и ширине распада за  $D_s^+(2317)$  и  $D^0(2308)$ .

Такође постоје и модели мезонских молекула (Swanson 2006, Szczepaniak 2003, Hwang & Kim 2005).

У раду Свансона (Swanson 2006), наведено је да постоји више модела новооткривених тешких мезона. Објашњено је да могуће интерпретације  $D_s(2317)$  и  $D_s(2460)$ , поред тетракваркних стања, укључују стања DK или  $DK^*$  молекула (DK молекули су егзотичне структуре везаних стања D и K мезона). Чак се помиње и могућност скаларног (и осног) мешања  $c\bar{s}$  стања са континуумом DK (и  $DK^*$ ). Сцепанијак (Szczepaniak 2003) је разматрао могућност да неколико стања, као на пример  $D_s(2320)$ ,  $D_s(1968)$  и  $D(1870)$ , могу да се опишу као Dл атоми. Резултати Хванга и Кима (Hwang & Kim 2005) показују да је константа распада стања  $D_s(2460)$  око два пута већа него за стање  $D_s(2317)$ , што је у супротности са очекивањем да симетрија тешких кваркова даје њихову једнакост. Показали су да ово велико одступање потиче од великог унутрашњег кретања кваркова унутар ових стања.

## 12. ЗАКЉУЧЦИ

Кваркови су елементарне честице које сачињавају протоне, неутроне и све остале сложене честице тј. хадроне, нуклеоне, мезоне... Кваркови су честице које имају спин  $1/2$  и имају електрични набој од  $1/3e$  ( $e$  - елементарно наелектрисање). Поред спина и наелектрисања имају и особину која се зове боја и она може имати 3 основне вредности. Граде теже честице тако што се повежу у безбојну комбинацију. Кваркова има 6 врста: ( $u$ ,  $d$ ) ( $c$ ,  $s$ ) ( $t$ ,  $b$ ) + њихове античестице. Идеја модела кваркова је да се уведе мали скуп честица, да им се придруже одређена својства, и да се помоћу њих изграде хадрони као што се од неутрона и протона граде различита атомска језгра. Основни хипотетички елементи хадрона називају се кваркови. Они нису никад изоловани или појединачно посматрани.

Сви познати хадрони су или мезони (бозони) или бариони (фермиони). Лаки мезони и лаки бариони се могу класификовати по тзв. унитарним симетријама: (а) по изоспину  $SU(2)$  и (б) по Гел-Мановој ароматској симетрији  $SU(3)$ . Ове симетрије распоређују појединачне хадроне у мултиплете са јасним предвиђањем маса. Лаки мезони постоје само у синглетима и октетима и састоје се од кварка и антикварка, а лаки бариони постоје у синглетима, октетима и декуплетима и састоје се од 3 кварка. На основу изведених формула за масе мезона и бариона са утицајем ФБ и ГР хиперфине интеракције и експерименталних података за масе мезона и бариона у овој докторској дисертацији израчунали смо и масе конститутивних кваркова. Урадили смо и поређење облика спектра тетракваркова са ФБ и ГР интеракцијом које су у основи различите, јер је ФБ "боја-спин", а ГР "аромат-спин" интеракција. Такође смо израчунали масу експериментално детектованих лаких скалара  $\sigma(500)$ ,  $f_0(980)$ ,  $\kappa(800)$ , и  $a_0(980)$  и проверили да они задовољавају фит шеме тетракваркова кад се укључи ГР ХФИ.

Постоји 27 различитих скаларних тетракваркова састављених од шармантног кварка  $c$  и три лака аромата  $u$ ,  $d$ ,  $s$ : 11 криптоегзотичних ( $3 D_s^+$ ,  $4 D^+$ ,  $4 D^0$ ) и 16 експлицитно егзотичних стања. Тетракваркови са квантним бројем шармом  $C = 1$  груписани су по истим својствима, у мултиплете са истим барионским бројем, спином и унутрашњом парношћу. Такође, по први пут је урађен кваркни садржај за свих 27 различитих тетракваркова  $cq\bar{q}\bar{q}$  комбинације, и израчунате су све масе ових тетракваркова помоћу ФБ и ГР хиперфине интеракције.

Скаларни шармантни мезони  $D_s^+(2317)$ ,  $D^0(2308)$  и  $D_s^+(2632)$  су детектовани током 2003-2004. г. Постојање прва два набројана мезона је било очекивано, али на масама око 150 MeV вишим од измерених и са масеном разликом између страног и нестраног мезона од око 100 MeV, док је трећи мезон потпуно неочекиван. Ова изненађења су изазвала неколико теоретских предлога могуће структуре речених мезона. Детектовање ових стања мезона мотивисало је теоријске физичаре да дају неколико предлога могуће структуре ових мезона и тако објасне добијене експерименталне резултате. Један од предлога је да су ова стања тетракваркови. У овој дисертацији је дата теоретска потпора експерименталним истраживањима да су наведени мезони стварно тетракваркови, тј. да имају изражену тетракваркну компоненту у својим таласним функцијама. Стања  $D_s^+(2317)$

и  $D_s^+(2632)$  могу да се идентификују са два криптоегзотична стања у спектру тетракваркова увођењем Ферми-Брајтове хиперфине интеракције, или Глозман-Рискине ХФИ: стање  $D_s^+(2317)$  може да се идентификује са најнижим стањем у спектру тетракваркова које је у мултиплету  $\bar{3}_A$  и  $D_s^+(2632)$  са стањем из мешања  $\bar{15}_S$  и  $\bar{3}_S$ . Израчуната разлика маса страног  $D_s^+(2317)$  и нестраног  $D^0(2308)$  тетракварка је десетак пута већа од експериментално добијене вредности – исто као да се ова стања састоје од једног  $c$  кварка и једног антикварка. Поред тога, израчунате су масе још неоткривених, егзотичних шармантних тетракваркова, те на тај начин могу да се предложи евентуални будући експерименти. Масе мезона и њихова структура рачунати су комбинацијом аналитичких и нумеричких метода. Такође су коришћене и графичке методе, на пример при конструисању тежинских дијаграма мултиплета тетракваркова.

Фитом теоријских једначина за масе мезона и бариона ( $\chi^2$  фит маса), добијене су вредности слободних параметара:  $m_{u,d}$ ,  $m_s$ ,  $m_c$ ,  $C$ . Са тим вредностима израчунате су масе тетракваркова. У случају лаких мезона и бариона  $m_c$  је додато као "спољни" параметар. Општа слика би била да су код свих спектра тетракваркови распоређени на исти начин, тј. спектар задржава увек исти облик (распоред честица), могућа су само одступања у том смислу да се цео спектар помера ка вишим или нижим енергијама или је могуће повећање (и смањивање) растојања између линија спектра. Поређењем спектра тетракваркова може да се закључи да су облици спектра са ФБ и ГР ХФИ слични, једино су померени за неку вредност. Ово је важан резултат који није био очекиван јер је ФБ колор-спин а ГР флејвор-спин интеракција. Резултати добијени из ове две интеракције потврђују да обе ХФИ дају сличне вредности за масе тетракваркова. Из различитих спектра, добијено је да је стање  $D_s^+(2317)$  са масом приближно 2317 MeV или нешто више у зависности од варирања  $m_c$  или константе. У спектру се појављују на масама 2317 MeV и 2632 MeV експлицитно егзотична стања као нпр. изотриплет  $\Sigma_s$  ( $\Sigma_s^{++}$ ,  $\Sigma_s^+$ ,  $\Sigma_s^0$ ). Показали смо да изотриплет из  $\bar{15}_S$  има исту масу као једно од два мешана стања које вероватно представља стање  $D_s^+(2632)$ , док изотриплет из  $6_A$  има исту масу као стање које вероватно представља стање  $D_s^+(2317)$ .

Основни резултати и закључци ове дисертације су:

- а) Потврдили смо тетракваркну природу скаларних шармантних мезона, тј. показали смо постојање тетракваркне компоненте у њиховим таласним функцијама.
- б) Урадили смо систематску анализу скаларних тетракваркних стања. Тежински дијаграми, иредуцибилне репрезентације и ароматске таласне функције су показани и анализирани.
- в) Дате су симетричне и антисиметричне спинске таласне функције, као и њихово детаљно извођење.
- г) Објаснили смо облике хамилтонијана хиперфиних интеракција и дали детаљно извођење доприноса тих интеракција масама тетракваркова.



д) Израчунали смо масе конститутивних кваркова на основу фита маса мезона и бариона, тј. на основу изведених формула за масе мезона и бариона са утицајем ФБ и ГР ХФИ и експерименталних података за масе мезона и бариона израчунали смо масе конститутивних кваркова из различитих фитова лаких и тешких мезона и бариона.

ђ) Израчунали смо масе шармантних скаларних тетракваркова, са мешањем стања са истим квантним бројевима.

е) Приказали смо масене спектре  $cq\bar{q}\bar{q}$  тетракваркова са мешањем честица са истим квантним бројевима: без утицаја и са утицајем Ферми-Брајтове и Глозман-Рискине хиперфине интеракције.

ж) Испитали смо утицај Ферми-Брајтове и Глозман-Рискине хиперфине интеракције на масени спектар тетракваркова.

з) Из масених спектра тетракваркова је утврђено да мешање раздваја два стања.

и) Помоћу масених спектра смо утврдили да су поменута стања тетракваркови и такође смо предвидели масе до сада неизмерених егзотичних шармантних тетракваркова.

ј) Израчунали смо масе експериментално детектованих честица лаког скаларног нонета  $\sigma(500)$ ,  $f_0(980)$ ,  $\kappa(800)$  и  $a_0(980)$  и испитали утицај Глозман-Рискине хиперфине интеракције на масени спектар ових скалара.

к) Потребно је у будућности више експерименталних потрага за детекцију осталих чланова.

л) Показали смо да је тетракваркни модел у складу са експериментално нађеним стањима.

## ЛИТЕРАТУРА

- K. Abe *et al.* (BELLE Collaboration), Phys. Rev. D **69**, 112002 (2004).  
A. Ali, C. Hambrock, M. Jamil Aslam, Phys. Rev. Lett. **104**, 162001 (2010).  
M. Alford, R. L. Jaffe, Nucl. Phys. B **578**, 367 (2000).  
C. Amsler *et al.*, Phys. Lett. B **667**, 1 (2008).  
Ž. Antunović, Standardni model (predavanja), Fakultet prirodoslovno-matematičkih znanosti, Split (2009).  
B. Aubert *et al.* (BABAR Collaboration), Phys. Rev. Lett. **90**, 242001 (2003).  
T. Barnes, F. E. Close, J. J. Dudek, S. Godfrey, E. S. Swanson, Phys. Lett. B **600**, 223 (2004).  
V. Borka Jovanović, Phys. Rev. D **76**, 105011 (2007a).  
V. Borka Jovanović, J. Res. Phys. **31**, 106 (2007b).  
V. Borka Jovanović, Book of abstracts of the III Southeastern European Workshop: Challenges Beyond the Standard Model (editors: G. Đorđević, Lj. Nešić, M. Haack), Kladovo, Serbia, September 2-9, p. 25-27 (2007c).  
V. Borka Jovanović, Fortschr. Phys. **56**, 462 (2008a).  
V. Borka Jovanović, Book of abstracts: The First Physics Congress of Bosnia and Herzegovina (editors: D. Mirjanić, D. Milošević, B. Predojević), Teslić, Republic of Srpska, B&H, December 20-22, p. 37 (2008b).  
V. Borka Jovanović, S. R. Ignjatović, Book of abstracts of the Spring School on Strings, Cosmology and Particles (editors: G. Đorđević, Lj. Nešić, M. M. Ćirković), Belgrade / Niš, Serbia, March 31 - April 4, p. 8 (2009).  
V. Borka Jovanović, S. R. Ignjatović, монографија у часопису *Publ. Astron. Obs. Belgrade* (editors: G. Đorđević, Lj. Nešić, M. M. Ćirković) **87**, 155 (2010).  
V. Borka Jovanović *et al.*, у припреми.  
M. E. Bracco, A. Lozea, R. D. Matheus, F. S. Navarra, M. Nielsen, Phys. Lett. B **624**, 217 (2005).  
T. V. Brito, F. S. Navarra, M. Nielsen, M. E. Bracco, Phys. Lett. B **608**, 69 (2005).  
F. E. Close, N. A. Törnqvist, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **28**, R249 (2002).  
P. Cvitanović, Group Theory, Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2008. (<http://www.cns.gatech.edu/GroupTheory/index.html>)  
A. De Rujula, H. Georgi, S. L. Glashow, Phys. Rev. D **12**, 147 (1975).  
V. Dmitrašinović, Phys. Rev. Lett. **94**, 162002 (2005).  
V. Dmitrašinović, Mod. Phys. Lett. A **21**, 533 (2006a).  
V. Dmitrašinović, Int. J. Mod. Phys. A **21**, 5625 (2006b).  
B. Dragović, S. R. Ignjatović, Uvod u teoriju polja, Prirodno-matematički fakultet, Banja Luka, u pripremi (2010).  
A. V. Evdokimov *et al.* (SELEX Collaboration), Phys. Rev. Lett. **93**, 242001 (2004).  
X.-C. Feng, Acta Phys. Polonica B **39**, 2931 (2008).  
X.-C. Feng, F.-C. Jiang, T.-Q. Chang, J.-L. Feng, Chinese Phys. B **17**, 4472 (2008).  
L. Ya. Glozman, D. O. Riska, Report-no: HU-TFT-94-48, arXiv:hep-ph/9412231 (1994).  
L. Ya. Glozman, D. O. Riska, Phys. Rep. **268**, 263 (1996).  
F. Halzen, A. Martin, Quarks, Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics, John Wiley, New York (1984).  
A. Hayashigaki, K. Terasaki, arXiv:hep-ph/0411285 (2004).

- A. Hayashigaki, K. Terasaki, *Prog. Theor. Phys.* **114**, 1191 (2005).
- D. S. Hwang, D. W. Kim, *Phys. Lett. B* **606**, 116 (2005).
- S. R. Ignjatović, *Matematička fizika 1, Prirodno-matematički fakultet, Banja Luka* (2008).
- A. Ilakovac, *Riješeni zadaci iz fizike elementarnih čestica, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb* (2001).
- R. L. Jaffe, *Phys. Rev. D* **15**, 267 (1977a).
- R. L. Jaffe, *Phys. Rev. D* **15**, 281 (1977b).
- H. F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, 2nd ed., IOP Publishing, 1998.
- G. Kane, *Modern Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, New York (1987).
- D. Krpić, *Elementarne čestice, Fizički fakultet, Beograd* (1998).
- A. Le Yaouanc, LL. Oliver, O. Pene, J.-C. Raynal, *Hadron Transitions in the Quark Model*, Gordon, Breach Science Publishers, London (1988).
- D. A. Liberman, *Phys. Rev. D* **16**, 1542 (1977).
- W. Lucha, F. Schöberl, D. Gromes, *Phys. Rep.* **200**, 127 (1991).
- Y.-R. Liu, S.-L. Zhu, Y.-B. Dai, C. Liu, *Phys. Rev. D* **70**, 094009 (2004).
- L. Maiani, F. Piccinini, A. D. Polosa, V. Riquer, *Phys. Rev. D* **71**, 014028 (2005).
- Y. Mikami *et al.* (BELLE Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **92**, 012002 (2004).
- D. Milošević, *Relativistička kvantna mehanika, Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo* (2003).
- B. Nicolescu, J. P. B. C. de Melo, *arXiv:hep-ph/0407088* (2004).
- M. Nielsen, R. D. Matheus, F. S. Navarra, M. E. Bracco, A. Lozea, *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **161**, 193 (2006).
- B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, *Particles, Nuclei*, Springer, New York (1995).
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2<sup>nd</sup> edition, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- S. Scherer, *Doctoral dissertation "Modelling ultra-relativistic Heavy Ion Collisions with the quark Molecular Dynamics qMD"*, Johann Wolfgang Goethe University, Frankfurt (2005).
- H. J. Schnitzer, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1540 (1975).
- B. Silvestre-Brac, *Phys. Rev. D* **46**, 2179 (1992).
- A. P. Szczepaniak, *Phys. Lett. B* **567**, 23 (2003).
- E. S. Swanson, *Phys. Rep.* **429**, 243 (2006).
- L. I. Šif, *Kvantna mehanika, Vuk Karadžić, Beograd* (1968).
- K. Terasaki, *arXiv:hep-ph/0405146* (2004a).
- K. Terasaki, *AIP Conf. Proc.* **717**, 556 (2004b).
- K. Terasaki, B. H. J. McKellar, *Prog. Theor. Phys.* **114**, 205 (2005).
- K. Terasaki, *Prog. Theor. Phys.* **116**, 435 (2006).
- G. 't Hooft, G. Isidori, L. Maiani, A. D. Polosa, V. Riquer, *Phys. Lett. B*, **662**, 424 (2008).
- E. van Beveren, G. Rupp, *AIP Conf. Proc.* **687**, 86 (2003a).
- E. van Beveren, G. Rupp, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 012003 (2003b).
- E. van Beveren, J. E. G. N. Costa, F. Kleefeld, G. Rupp, *Phys. Rev. D* **74**, 037501 (2006).
- E. van Beveren, G. Rupp, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 202001 (2004).
- J. Vijande, F. Fernández, A. Valcarce, B. Silvestre-Brac, *Eur. Phys. J. A* **19**, 383 (2004).
- J. Vijande, A. Valcarce, F. Fernández, B. Silvestre-Brac, *Phys. Rev. D* **72**, 034025 (2005).
- J. Vijande, F. Fernández, A. Valcarce, *Phys. Rev. D* **73**, 034002 (2006).
- J. Vijande, F. Fernández, A. Valcarce, *Eur. Phys. J. A* **31**, 722 (2007).
- S. Yasui, M. Oka, *Phys. Rev. D* **76**, 034009 (2007).

## Сажетак

Недавни догађаји у спектроскопији шармантних мезона убедљиво указују да постоји велики број скаларних мезона са ниском масом као што су  $D_s^+(2317)$ ,  $D_s^+(2632)$ ,  $D^0(2308)$ , и слична стања. То се заједно са неким необичним особинама нарушења ароматске  $SU(3)$  симетрије може објаснити помоћу хипотезе тетракваркова. Урадили смо објашњење експеримената и предвиђање разлике маса пре њеног мерења. Такође смо урадили систематску анализу шармантних тетракваркних стања. Објаснили смо и анализирали тежинске дијаграме, иредуцибилне репрезентације и ароматске таласне функције. Описан је детаљан метод израчунавања. Такође је приказан масени спектар са мешањем честица које имају исте квантне бројеве. Дата је и дискусија зависности резултата од параметара. Такође смо дали прорачуне за масе експериментално откривених лаких скалара  $\sigma(500)$ ,  $f_0(980)$ ,  $\kappa(800)$  и  $a_0(980)$  и потврдили да се они уклапају у тетракваркну шему када се укључи Глозман-Рискина хиперфина интеракција. Израчунали смо масени спектар система два кварка и два антикварка укључујућу Глозман-Рискину (ГР) и Ферми-Брајтову (ФБ) хиперфину интеракцију (ХФИ). Да бисмо израчунали масе конститутивних кваркова, користили смо експерименталне масе мезона и бариона преузете од "Групе за податке о честицама" ("*Particle Data Group*"), методом  $\chi^2$  фита маса. Када упоредимо ФБ ХФИ, која је боја-спин интеракција, са ГР ХФИ, која је аромат-спин интеракција, занимљиво је да се добијају слични резултати. У нашем конститутивном моделу кваркова, ГР и ФБ ХФИ су калибрисане код мезона и бариона, затим су искоришћене код тетракваркова. Користећи ФБ ХФИ, добили смо да су конститутивне масе кваркова врло сличне масама које су добијене из различитих феноменолошких модела. Показали смо, на основу наших резултата, да сва три стања  $D_s^+(2632)$ ,  $D^0(2308)$ ,  $D_s^+(2317)$  вероватно имају тетракваркну природу. Израчунали смо допринос ГР и ФБ ХФИ масама  $c\bar{q}q\bar{q}$  тетракваркова и такође смо израчунали масе конститутивних кваркова и упоредили ГР и ФБ ХФИ. Вероватно да ФБ ХФИ и ГР интеракције нису комплетне ефективне интеракције између два кварка, и због тога теоријско предвиђање није потпуно исто као експеримент. Потребно је у будућности више експерименталних потрага за детекцију осталих чланова  $c\bar{q}q\bar{q}$ , посебно оних егзотичних.

## Abstract

Recent developments in the charm meson spectroscopy strongly indicate an overpopulation of low lying scalars such as  $D_s^+(2317)$ ,  $D_s^+(2632)$ ,  $D^0(2308)$ , and similar states, that together with some unusual SU(3) flavor symmetry breaking patterns, can be explained by way of the tetraquark hypothesis. We have performed calculations in both explaining observed phenomena and predicting the mass difference experiment before its completion. We have made a systematic analysis of the charm tetraquark states. Weight diagrams, irreducible representations and flavor wave functions are shown and analyzed. Detailed method of calculation is described. The mass spectrum with mixing of particles with the same quantum numbers is shown. The discussion how results depend on parameters is also given. We have also given estimates for masses of experimentally detected light scalars  $\sigma(500)$ ,  $f_0(980)$ ,  $\kappa(800)$  and  $a_0(980)$  and confirmed that they satisfactorily fit in the tetraquark scheme when Glozman-Riska hyperfine interaction is included. We calculated the mass spectra of two-quark-two-antiquark system including Glozman-Riska (GR) and Fermi-Breit (FB) hyperfine interaction (HFI). We used the observed meson and baryon masses, taken from "Particle Data Group", to obtain constituent quark masses by way of  $\chi^2$  mass fit. When comparing FB HFI, which is color-spin interaction, with GR HFI, which is flavor-spin interaction, it is interesting that we have obtained similar results. In our constituent quark model, GR and FB HFI are calibrated for mesons and baryons, then used for tetraquarks. Using FB HFI, we obtained constituent quark masses very similar to masses obtained using different phenomenological models. We have shown that, according to our results, all three states  $D_s^+(2632)$ ,  $D^0(2308)$ ,  $D_s^+(2317)$  might have the tetraquark nature. We gave the contribution of GR and FB HFI to  $cq\bar{q}\bar{q}$  tetraquark masses and also we calculated constitutive quark masses and compared GR and BF HFI. The FB and GR may not be complete effective two-quark interactions, thus the theoretical prediction does not fully agree with the experiment. More experimental searches for detection of other  $cq\bar{q}\bar{q}$  members especially those exotic ones are needed in the future.